7. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 30. Mai 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Christian Wiesel PF 55). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie sowohl Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Wir betrachten im Folgenden stets einen Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$.

Übungsaufgabe 7.I [4 Punkte] (Doob-Meyer-Zerlegung)

Seien $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtrierung, welche die üblichen Bedinungen erfülle, und $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges $(\mathcal{F}_t)_t$-Submartingal von der Klasse DL. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass unter diesen Voraussetzungen gilt:

a) Es existiert ein rechtsstetiges $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal $(M_t)_{t\geq 0}$ und ein aufsteigender Prozess $(A_t)_{t\geq 0}$ mit $X_t = M_t + A_t$ für alle $t \in [0, \infty)$.

b) $(A_t)_t$ kann natürlich gewählt werden.

c) Wenn wir verlangen, dass $(A_t)_t$ natürlich ist, dann ist die Zerlegung $X_t = M_t + A_t$ eindeutig (bis auf Ununterscheidbarkeit).

Wir setzen nun voraus, dass $(X_t)_t$ sogar von der Klasse D ist. Zeigen sie, dass dann gilt:

d) $(A_t)_t$ ist *integrierbar* und $(M_t)_t$ gleichgradig integrierbar.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\mathbb{E}(A_\infty) < \infty$ unter Ausnutzung von Teil a) und Verwendung des Submartingal-Konvergenzsatzes (Problem 3.19). Folgern Sie dann die gleichgradige Integrierbarkeit von $(M_t)_t$.

Übungsaufgabe 7.II [3 Punkte] (Regularität von Submartingalen)

Ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Submartingal $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt *regulär*, wenn für alle $a > 0$ und jede monoton wachsende Folge von $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten $(T_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{S}_a$ mit $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ ($\mathbb{P}$-f.s.) gilt: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{T_n}) = \mathbb{E}(X_T)$. Zeigen Sie, dass jedes stetige, nichtnegative Submartingal bereits regulär ist.

Übungsaufgabe 7.III [5 Punkte]

Seien $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtrierung von $\mathcal{F}$, $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger, adaptierter, nichtnegativer Prozess mit $X_0 = 0$ und $(A_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger, adaptierter, *aufsteigender* Prozess. Es gelte

$$\mathbb{E}(X_T) \leq \mathbb{E}(A_T) \text{ für alle beschränkten } (\mathcal{F}_t)_t\text{-Stoppzeiten } T. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass für $V_t := \sup_{0\leq s\leq t} X_s$ und beliebige $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten $T \in \mathscr{S}$ folgende Abschätzungen gelten:

a) $\mathbb{P}\left(V_T \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbb{E}(A_T)$ für jedes $\varepsilon > 0$,

b) $\mathbb{P}\left(V_T \geq \varepsilon, A_T < \delta\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbb{E}(\delta \wedge A_T)$ für alle $\varepsilon, \delta > 0$,

c) $\mathbb{P}\left(V_T \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbb{E}(\delta \wedge A_T) + \mathbb{P}\left(A_T \geq \delta\right)$ für alle $\varepsilon, \delta > 0$.

Hinweis zu $a)$*:*
Definieren Sie eine Stoppzeit $H_\varepsilon := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \geq \varepsilon\}$ *und zeigen Sie:* $\{V_T \geq \varepsilon\} = \{V_{T\wedge H_\varepsilon} \geq \varepsilon\}$. *Um Voraussetzung (1) anwenden zu können, approximieren Sie* $T \wedge H_\varepsilon$ *durch eine Folge* $(T_n)_n$ *von* beschränkten *Stoppzeiten* $T_n := T \wedge H_\varepsilon \wedge n$ *und beachten Sie, dass auf* $\{V_{T_n} \geq \varepsilon\}$ *gilt:* $X_{T_n} \geq \varepsilon$.

Hinweis zu $b)$*:*
Zeigen Sie, dass für die Stoppzeit $S := \inf\{t \geq 0 \mid A_t \geq \delta\}$ *gilt:* $\{V_T \geq \varepsilon, A_T < \delta\} \subset \{V_{T\wedge S} \geq \varepsilon\}$.

Bemerkung: Falls es sich bei $(X_t)_t$ *um ein Submartingal handelt, so kann für* $(A_t)_t$ *der stetige, aufsteigende Prozess aus der Doob-Meyer Zerlegung gewählt werden (vgl. Satz 4.10 und Satz 4.14).*

Übungsaufgabe 7.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am 03.06., bzw. 05.06. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Erläutern Sie die Begriffe der quadratischen Variation und Kovariation und stellen Sie einige ihrer Eigenschaften dar.