8. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 06. Juni 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Christian Wiesel PF 55). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Wir betrachten im Folgenden stets einen Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ zusammen mit einer Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ von $\mathcal{F}$.

Hausaufgabe 8.I [4 Punkte]
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger, $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptierter Prozeß, so dass für jedes $t > 0$ fix, jede Partition Π von $[0, t]$ und ein $p > 0$ gilt:

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(p)}(\Pi) = L_t \quad \text{in Wahrscheinlichkeit,}$$

wobei L_t eine Zufallsvariable mit Werten in $[0, \infty)$ $\mathbb{P}$-f.s. ist.
Zeigen Sie, dass für alle

a) $q \in (p, \infty)$ gilt: $\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(q)}(\Pi) = 0$ in Wahrscheinlichkeit;

b) $q \in (0, p)$ gilt auf der Menge $\{L_t > 0\}$: $\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(q)}(\Pi) = \infty$ in Wahrscheinlichkeit.

Hausaufgabe 8.II [2 Punkte]
Weisen Sie nach, dass für $X, Y \in \mathcal{M}_2^c$ auf jeder Partition $\Pi_m = \{t_0, \dots, t_m\}$ von $[0, t]$ gilt:

$$\lim_{\|\Pi_m\|\to 0} \sum_{k=1}^{m} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right)\left(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}\right) = \langle X, Y\rangle_t \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$

Hausaufgabe 8.III [6 Punkte]
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Jedes lokale Martingal der Klasse DL ist eine Martingal.

b) Jedes nichtnegative lokale Martingal ist ein Supermartingal.

c) Sei $M \in \mathcal{M}^{\text{loc,c}}$ und σ eine beliebige $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit, dann gilt $\mathbb{E}[M_\sigma^2] \leq \mathbb{E}[\langle M\rangle_\sigma]$, wobei $M_\infty^2 := \underline{\lim}_{\,t\to\infty} M_t^2$.

Hinweis zu c):
- Benutzen Sie Definition 5.18 aus Aufgabe 8.IV und setzen Sie dabei Problem 5.17 voraus.
- Betrachten Sie die Fälle $\mathbb{E}[\langle M\rangle_\sigma] < \infty$ und $\mathbb{E}[\langle M\rangle_\sigma] = \infty$ separat.
- Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{E}[M_{\tau_n\wedge\tilde{\sigma}}^2] = \mathbb{E}[\langle M\rangle_{\tau_n\wedge\tilde{\sigma}}]$ für jede beschränke $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit $\tilde{\sigma}$ und eine geeignete aufsteigende Folge $(\tau_n)_n$ von $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten mit $\mathbb{P}(\lim \tau_n = \infty) = 1$ gilt.

Hausaufgabe 8.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am 10.06. bzw. 12.06. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die gegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Die quadratische Kovariation $\langle X, Y \rangle$ für Prozesse X, Y aus $\mathcal{M}^{\mathrm{loc,c}}$.

Hinweis: Zeigen Sie die Wohldefiniertheit von von Definition 5.18 mithilfe von Problem 5.17 aus Kapitel 1 von Karatzas und Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus.