Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe, Christian Wiesel SS 2014

9. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 13. Juni 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Christian Wiesel PF 55). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Wir betrachten im Folgenden stets einen Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$.

Hausaufgabe 9.I [6 Punkte]

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Prozess aus $\mathcal{M}_2$ mit stationären, unabhängigen Inkrementen, d. h. für jede Zerlegung $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq t$, $n \in \mathbb{N}$, gilt, dass $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ unabhängig sind und $X_{t_i+s} - X_{t_i} \overset{\mathrm{d}}{=} X_s$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $s > 0$. Weiter sei $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ die vom Prozess $(X_t)_t$ erzeugte Filtrierung.

a) Zeigen Sie, dass für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{E}[X_t^2] = t\,\mathbb{E}[X_1^2]. \qquad (1)$$

i) Betrachten Sie für feste $t > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = t$ mit $t_k - t_{k-1} = t/n$ und stellen Sie X_t als Teleskopsumme dar

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \right).$$

Leiten Sie daraus ab: $\mathbb{E}[X_t^2] = n\,\mathbb{E}[X_{t/n}^2]$.

ii) Zeigen Sie (1) nun für $t \in \mathbb{Q}_+$, d. h. $t = n/m$ für geeignete $n, m \in \mathbb{N}$.

iii) Folgern Sie, dass (1) sogar für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt.

b) Verifizieren Sie, dass ferner für alle $t \geq 0$ gilt

$$\langle X \rangle_t = t\,\mathbb{E}[X_1^2]. \qquad (2)$$

i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X_t^2 | \mathcal{F}_s^X] = X_s^2 + \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2]$ für $s \leq t$.

ii) Weisen Sie nach, dass $(X_t^2 - t\,\mathbb{E}(X_1^2))_t$ ein $(\mathcal{F}_t^X)_t$-Martingal ist und folgern Sie (2).

Hausaufgabe 9.II [4 Punkte]

Sei $\mathscr{C}$ die Menge aller endlich-dimensonalen Zylindermengen der Form

$$C = \left\{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} \colon \ (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n)) \in A\right\} \qquad \text{für } n \geq 1, \ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $t_i \in [0, \infty)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Weiter sei S eine abzählbare Teilmenge aus $[0, \infty)$ und $\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}$. Dann wird die Menge aller auf S mit ω übereinstimmenden Abbildungen definiert durch

$$\mathrm{Mod}_S(\omega) := \left\{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : \tilde{\omega}|_S = \omega|_S\right\}$$

und weiter sei $\mathrm{Mod}_S(\Gamma) := \bigcup_{\omega\in\Gamma} \mathrm{Mod}_S(\omega)$ für $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{[0,\infty)}$.

a) Zeigen Sie, dass die folgende Menge eine σ-Algebra ist.

$$\Sigma := \left\{\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{[0,\infty)} : \exists S_\Gamma \subseteq [0, \infty) \text{ abzählbar mit } \mathrm{Mod}_{S_\Gamma}(\Gamma) = \Gamma\right\}$$

b) Zeigen Sie, dass gilt $\mathscr{C} \subseteq \Sigma$ und damit ferner auch $\mathscr{B}\left(\mathbb{R}^{[0,\infty)}\right) \subseteq \Sigma$ erfüllt ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}) \notin \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^{[0,\infty)}\right)$ gilt.

Hausaufgabe 9.III [4 Punkte]

Sei nun $\mathscr{C}$ (bzw. $\mathscr{C}_t$) die Menge aller endlich-dimensonalen Zylindermengen der Form

$$C = \{\omega \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}) \colon \ (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n)) \in A\} \qquad \text{für } n \geq 1, \ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $t_i \in [0, \infty)$ (bzw. $t_i \in [0, t]$) für alle $i = 1, \ldots, n$. Ferner wird mit $\mathscr{G}$ (bzw. $\mathscr{G}_t$) die kleinste σ-Algebra bezeichnet, die $\mathscr{C}$ (bzw. $\mathscr{C}_t$) enthält.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\mathscr{G} = \mathscr{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$ (= die Borel-σ-Algebra erzeugt von den offenen Mengen in $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$).

b) $\mathscr{G}_t = \varphi_t^{-1}(\mathscr{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))) =: \mathscr{B}_t(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$, wobei $\varphi_t \colon \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ der Abbildung $(\varphi_t \circ \omega)(s) = \omega(t \wedge s)$, $s \in [0, \infty)$, entspricht.

Hinweis zu a): Zeigen Sie $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$, indem Sie nachweisen, dass die ein-dimensionalen (und somit auch n-dimensionalen) Zylindermengen offen in $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ sind. Benutzen Sie für die Rückrichtung, dass jede offene Kugel aus $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ in $\mathscr{G}$ enthalten ist und folgern Sie unter Ausnutzung der Separabilität von $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$, dass $\mathscr{G} \supseteq \mathscr{B}(\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}))$.

Hausaufgabe 9.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am 17.06. bzw. 18.06. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die gegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Brownsche Bewegung: Definition und Existenz/Konstruktion nach Lévy-Ciesielski