Wahrscheinlichkeitstheorie II

Christian Wiesel
V5-109

1. Martingale, Stoppzeiten und Filtrierungen

1.1 Stochastische Prozesse und σ-Algebren

1.2 Stoppzeiten

← Vorlesung vom 17.04.

1.3 Martingale in stetiger Zeit

0. Zufallsvariablen

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Betrachte eine $\mathbb{R}^d$-wertige ZV

$$X_1 : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \underline{\mathbb{P}X_1^{-1}}\right), \quad \text{d.h.} \begin{cases} X_1 : \Omega \to \mathbb{R}^d, & \text{Abbildung} \\ \sigma(X_1) \subset \mathcal{F}, & \text{d.h. } X_1 \text{ ist } \mathcal{F}\text{- messbar} \end{cases}$$

$$\sigma(X_1) := \sigma\{\{X_1 \in B\} | B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$$

Bildmaß $\mathbb{P}X_1^{-1}$ = Verteilung von X_1

Seien analog X_2 und X_3 ebenfalls $\mathbb{R}^d$-wertige ZV auf dem ***gleichen*** W'Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Vergleich zweier ZV'en

$\mathbb{P}$-f.s. $\quad X_1 = X_2 \ \mathbb{P}\text{-f.s.} :\Leftrightarrow \mathbb{P}[X_1 = X_2] = 1$

in Verteilung $\quad X_1 \cong X_2 \quad :\Leftrightarrow \mathbb{P}X_1^{-1} = \mathbb{P}X_2^{-1}$

Gemeinsame Verteilung

Betrachte die ‚zusammengesetzte' ZV $\quad (X_1, X_2, X_3) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \left(\mathbb{R}^{3d}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{3d}), \mathbb{P}(X_1, X_2, X_3)^{-1}\right)$

Falls X_1, X_2 und X_3 ***unabhängige*** ZV'en sind, so gilt: $\quad \mathbb{P}(X_1, X_2, X_3)^{-1} \stackrel{!}{=} \mathbb{P}X_1^{-1} \otimes \mathbb{P}X_2^{-1} \otimes \mathbb{P}X_3^{-1}$

1-dimensionale Randverteilungen von (X_1, X_2, X_3)

1.1a Stochastische Prozesse (1/2)

Definition (1.6)

Ein ***stochastischer Prozess*** X

ist eine **Familie** $X \equiv (X_t)_{t\geq 0}$ von $\mathbb{R}^d$-wertigen ZV'en $X_t: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), \mathbb{P}X_t^{-1}\right), \forall\, t \geq 0$

$\omega \to X_t(\omega)$ *(messbare Abbildung!)*

Ein stochastischer Prozess X heißt ***messbar,*** falls die Abbildung

$$\boxed{\begin{aligned} X:\ ([0,\infty) \times \Omega, \mathbb{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}) &\to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right), \\ (t,\omega) &\to X_t(\omega) \end{aligned}}$$

messbar *ist.*

feste 'Zeitpunkte' : *ZV'en, Verteilungen, (Messbarkeit)*

festes $t \geq 0$

$$X_t: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), \underbrace{\mathbb{P}X_t^{-1}}_{=:\nu_t}\right), \quad \mathbb{R}^d\text{-wertige ZV}$$
$$\omega \to X_t(\omega)$$

$\Rightarrow$ **1-dim. Randverteilungen ν_t**

feste $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^{nd}$-wertige ZV :

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}): (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \left(\mathbb{R}^{nd}, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{nd}\right), \underbrace{\mathbb{P}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}}_{=:\nu_{t_1,\dots,t_n}}\right),$$

$\Rightarrow$ **n-dim. Randverteilungen** $\nu_{t_1,\dots,t_n}$

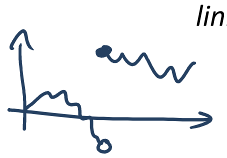
festes 'Sample' $\omega \in \Omega$: *Pfade*

$$\left([0,\infty), \mathbb{B}([0,\infty)\right) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right),$$
$$t \to X_t(\omega)$$

mögliche Pfadeigenschaften:

Stetigkeit

RCLL (càdlàg) *:= rechtsstetig und linke Limiten existieren*



1.1a Stochastische Prozesse (2/2)

Vergleich zweier stochastischer Prozesse $X = (X_t)_{t\geq 0}$ und $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$

(auf dem *gleichen* W'Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert)

Definition (1.3, 1.1, 1.2')

X und Y heißen ***ununterscheidbar***, falls $\mathbb{P}[X_t = Y_t, \forall 0 \leq t < \infty] = 1$

$\Downarrow$ $\cancel{\Uparrow}$ $(*)$

Y heißt ***Modifikation*** von X, falls $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1 \quad \forall 0 \leq t < \infty$

$\Downarrow$

X und Y haben ***gleiche Randverteilungen***, falls $\mathbb{P}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1} = \mathbb{P}(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})^{-1}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$

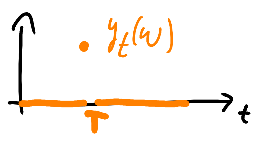
$(*)$ Gegenbeispiel (1.4)

Sei eine T eine nichtnegative ZV für die eine **Dichtefunktion** bzgl. des Lebesguemaßes existiert.

Insbesondere gilt also für alle $t \geq 0$: $\mathbb{P}(T = t) = 0$

Setze nun $X_t := 0 \quad \forall t \geq 0,$

$$Y_t := \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T \end{cases}$$



Beobachtung

Y ***Modifikation*** von X:

$\forall t$: $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = \mathbb{P}[T \neq t] = 1$

Aber: $\mathbb{P}[X_t = Y_t, \forall 0 \leq t < \infty] = 0$

1.1b Filtrierungen (1/9)

Idee:

X_1, X_2 und X_3 $\mathbb{R}^d$ wertige ZV'en auf dem gleichen W'Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\boxed{\sigma(X_1) := \sigma\{\{X_1 \in B\} | B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}}$$

„Alle Ereignisse, über die man bei Kenntnis von $X_1(\omega)$ immer entscheiden kann, ob sie eingetreten sind oder nicht"

Bsp: $X_1 \equiv 37$ $konstant!$ $\Rightarrow$ $\sigma(X_1) = \{\emptyset, \Omega\}$

$$X_1 := id_\Omega: \quad (\Omega := [0,1], \mathcal{F} := \mathcal{B}([0,1]), \mathbb{P} = \lambda) \to ([0,1], \mathcal{B}([0,1])) \Rightarrow \sigma(X_1) = \mathcal{B}([0,1]) = \mathcal{F}$$
$$\omega \to \omega$$

$Münzwurf\ mit\ rotem\ und\ blauem\ Würfel$ $\quad X_1 := Augensumme$ $\quad X_2 := Differenz$

$\Omega := \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$

$\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ *(Potenzmenge)*

$\{(1,1)\} \in \sigma(X_1)$

$\{(3,4)\} \notin \sigma(X_1)$

Aber: $\sigma(X_1, X_2) = \mathcal{F}$

Es gilt allgemein: $\sigma(X_1) \subset \sigma(X_1, X_2) \subset \sigma(X_1, X_2, X_3) \subset \mathcal{F}$

(i.A. keine strikten Inklusionen)

1.1b Filtrierungen (2/9)

Definition

Eine ***aufsteigende Familie*** $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ von Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ heißt ***Filtrierung*** von $\mathcal{F}$.

Für eine Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ gilt also: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \forall\, 0 \leq s < t$

Sei nun wieder $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf dem W'Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Für jeden Zeitpunkt $t \geq 0$ ist also die ZV X_t *messbar* bzgl. $\mathcal{F}$, d.h. $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}$ $\forall t \geq 0$

Definition

Definiere für jedes $t \geq 0$ die vom Prozess X erzeugte σ-Algebra $\boxed{\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s | s \leq t) \subset \mathcal{F}}$

Die Familie $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ heißt die ***vom Prozess X erzeugte Filtrierung***.

Beobachtung

Es gilt offensichtlich $\mathcal{F}_s^X \subset \mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}$ für alle $0 \leq s < t$,

es handelt sich bei $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ also tatsächlich um eine Filtrierung.

Definition (1.9)

Sei nun eine beliebige Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ von $\mathcal{F}$ gegeben.

Der stoch. Prozess $\boldsymbol{X}$ **heißt $(\boldsymbol{\mathcal{F}_t})_{t \geq 0}$*-adaptiert,*** falls **für alle $t \geq 0$** gilt: **X_t ist $\mathcal{F}_t$- messbar**

$d.h. \sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t$

Beobachtung $\boxed{X \text{ ist } (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}\text{-adapt.} \Leftrightarrow \mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t\ \forall t \geq 0}$

1.1b Filtrierungen (3/9)

Für eine Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ gilt: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \forall\, 0 \leq s < t$

$\boxed{\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s | s \leq t) \subset \mathcal{F}}$ $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ heißt die *vom Prozess X erzeugte Filtrierung*.

X ist $(\boldsymbol{\mathcal{F}_t})_{t\geq 0}$***-adapt.***: $\Leftrightarrow$ X_t ist $\mathcal{F}_t$- mb $\forall t \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t\ \forall t \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t\ \forall t \geq 0$

Definition Sei eine Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ gegeben.

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\cup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$$

$$\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

$$\mathcal{F}_{t^-} := \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_0, & t = 0 \\ \sigma\left(\cup_{s<t} \mathcal{F}_s\right), & t > 0 \end{Bmatrix}$$

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ heißt

rechtsstetig, falls $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0$

linksstetig, falls $\mathcal{F}_{t^-} = \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0$

Definition (1.11)

Ein stochastischer Prozess X heißt **progressiv *messbar bzgl.*** $(\boldsymbol{\mathcal{F}_t})_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$ die Abb.

$$X|_{[0,t]\times\Omega}\colon \left([0,\boldsymbol{t}] \times \Omega, \mathbb{B}([0,\boldsymbol{t}]) \otimes \mathcal{F}_{\boldsymbol{t}}\right) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right), \quad \textbf{\textit{messbar}}\ \textit{ist.}$$

$$(s,\omega) \to X_s(\omega)$$

1.1b Filtrierungen (4/9)

Ein stochastischer Prozess X heißt **progressiv *messbar bzgl.*** $(\boldsymbol{\mathcal{F}_t})_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$ die Abb.

$$X|_{[0,t]\times\Omega}\colon \left([0,\boldsymbol{t}] \times \Omega, \mathbb{B}([0,\boldsymbol{t}]) \otimes \mathcal{F}_{\boldsymbol{t}}\right) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right), \quad \textbf{\textit{messbar}}\ \textit{ist.}$$

$\Downarrow$ $\Uparrow \exists$ *Modifikation*

Vergleich:

Ein stochastischer Prozess X heißt ***messbar,*** falls die Abbildung

$$X\colon \left([0,\infty) \times \Omega, \mathbb{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}\right) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right), \quad \textbf{\textit{messbar}}\ \textit{ist.}$$

X ist $(\boldsymbol{\mathcal{F}_t})_{t\geq 0}$***-adaptiert*** : $\Leftrightarrow$ X_t ist $\mathcal{F}_t$- messbar $\forall t \geq 0$

Beobachtung

X progressiv *messbar bzgl.* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \Rightarrow$ X *messbar* und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert

1.1b Filtrierungen (5/9)

Ein stochastischer Prozess X heißt **progressiv *messbar bzgl.*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$ die Abb.

$$X|_{[0,t]\times\Omega}\colon \ ([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right),$$ ***messbar** ist.*

Beobachtung

X progressiv *messbar bzgl.* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \Rightarrow$ X *messbar* und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert

$z.z.:$ X_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar!

$$\begin{array}{llllll} X_t\colon & (\Omega, \mathcal{F}_t) \xrightarrow{\eta_t} & ([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) & \xrightarrow{X|_{[0,t]\times\Omega}} & \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) & \boldsymbol{mb}.! \\ & \omega \quad \to & (t,\omega) & \to & X_t(\omega) & \\ & \quad messbar & & messbar & & \end{array}$$

X progressiv *messbar bzgl.* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

1.1b Filtrierungen (6/9)

Ein stochastischer Prozess X heißt **progressiv *messbar bzgl.*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$ die Abb.

$$X|_{[0,t]\times\Omega}\colon \ ([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right),$$ ***messbar** ist.*

$\Downarrow$ $\quad \Uparrow \exists$ *Modifikation*

Vergleich:

Ein stochastischer Prozess X heißt ***messbar,*** falls die Abbildung

$$X\colon \ ([0,\infty)\times\Omega, \mathbb{B}([0,\infty))\otimes\mathcal{F}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right),$$ ***messbar** ist.*

X ist $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-***adaptiert*** $:\Leftrightarrow$ X_t ist $\mathcal{F}_t$- messbar $\forall t \geq 0$

Beobachtung

X progressiv *messbar bzgl.* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \Rightarrow$ X *messbar* und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert

Proposition (1.12)

X *messbar* und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert $\Rightarrow \exists$ progressiv messbare *Modifikation* $\widetilde{X}$ von X

Beweis: *Meyer 1966, S.68*

1.1b Filtrierungen (7/9)

Ein stochastischer Prozess X heißt **progressiv *messbar bzgl.*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$ die Abb.

$$X|_{[0,t]\times\Omega}: ([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right), \qquad \textit{messbar ist.}$$

Beobachtung

X progressiv *messbar bzgl.* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \Rightarrow$ X *messbar* und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert

Proposition (1.12)

X *messbar* und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert $\Rightarrow \exists$ progressiv messbare *Modifikation* $\widetilde{X}$ von X

Proposition (1.13)

X $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert und ***jeder*** Pfad $t \to X_t(\omega)$ *rechtsstetig* $\Rightarrow$ X progressiv messbar
(oder alternativ jeder Pfad linksstetig),

Beweis

...

1.1b Filtrierungen (8/9)

Ein stochastischer Prozess X heißt **progressiv *messbar bzgl.*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$ die Abb.

$$X|_{[0,t]\times\Omega}: ([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right), \qquad \textit{messbar ist.}$$

Proposition (1.13)

X $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert und ***jeder*** Pfad $t \to X_t(\omega)$ *rechtsstetig* $\Rightarrow$ X progressiv messbar
(oder alternativ jeder Pfad linksstetig),

Beweis Sei jeder Pfad $\mathrm{t} \to \mathrm{X_t}(\omega)$ rechtsstetig.

1. Schritt: Zeitdiskretisierung

Fixiere $t \geq 0$ und splitte das Zeitinterval $[0,\boldsymbol{t}]$ in 2^n Teilintervalle auf (für ein bel. $n \in \mathbb{N}$)

$$[0,t] = \underbrace{[0,\tfrac{1\cdot t}{2^n}]}_{k=0} \cup \underbrace{(\tfrac{1\cdot t}{2^n},\tfrac{2\cdot t}{2^n}]}_{k=1} \cup \cdots \cup (\tfrac{k\cdot t}{2^n},\tfrac{(k+1)\cdot t}{2^n}] \cup \cdots \cup \underbrace{(\tfrac{(2^n-1)\cdot t}{2^n}, t]}_{k=2^n-1}$$

und definiere für $s \in [0,t]$:

$$\boxed{X_s^{(n)}(\omega) := X_{\frac{(k+1)\cdot t}{2^n}}(\omega),} \quad \text{wobei } \frac{\mathrm{k}\cdot t}{2^n} < \mathrm{s} \leq \frac{(k+1)\cdot t}{2^n} \text{ für ein geeignetes } k \in \{0,1,\dots,2^n-1\}$$

1.1b Filtrierungen (9/9)

Ein stochastischer Prozess X heißt **progressiv *messbar bzgl.*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$ die Abb.

$$X|_{[0,t]\times\Omega}: ([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right), \quad \textbf{\textit{messbar}} \textit{ ist.}$$

Proposition (1.13)

X $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert und ***jeder*** Pfad $t \to X_t(\omega)$ *rechtsstetig* $\Rightarrow$ X progressiv messbar

Beweis Sei jeder Pfad $t \to X_t(\omega)$ rechtsstetig.

1. Schritt: Zeitdiskretisierung

für $s \in [0,t]$: $\boxed{X_s^{(n)}(\omega) := X_{\frac{(k+1)\cdot t}{2^n}}(\omega),}$ $\frac{k\cdot t}{2^n} < s \leq \frac{(k+1)\cdot t}{2^n}$ für geeign. $k \in \{0,1,\dots,2^n-1\}$

2. Schritt: $X^{(n)}: ([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, *ist messbar!*

Sei $\mathcal{O} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

$$X_s^{(n)^{-1}}(\mathcal{O}) = \bigcup_{k=0,\dots,2^n-1} \left(\frac{k\cdot t}{2^n}, \frac{k+1\cdot t}{2^n}\right] \times \underbrace{X_{\frac{(k+1)\cdot t}{2^n}}^{-1}(\mathcal{O})}_{\text{Adaptiertheit} \to \in \mathcal{F}_{\frac{(k+1)\cdot t}{2^n}} \subset \mathcal{F}_t} \in \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$$

$\frac{(k+1)\cdot t}{2^n} \leq t$, & $(\mathcal{F}_t)_t$ **Filtrierung!**

3. Schritt: Limes $n \to \infty$, nutze Rechtsstetigkeit der Pfade!

Für $s \in [0,t]$
und **alle** $\omega \in \Omega$ gilt $\lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega)$

$\Rightarrow$ Beh.

1.2 Stoppzeiten (1/9)

Definition (1.15)

Eine ***Zufallszeit*** ist eine $[0,\infty]$-wertige ZV: $T: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to ([0,\infty], \mathcal{B}([0,\infty]))$

Für geg. stoch. Prozess X und Zufallszeit T sei $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$, für $\omega \in \{T < \infty\}$

Beobachtung/Übung (1.16)

Falls X messbar und T endlich (also $\Omega = \{T < \infty\}$), dann ist X_T eine ZV,
d.h. $\omega \to X_{T(\omega)}(\omega)$ ist messbar.

Falls $X_\infty(\omega) := \lim_{t\to\infty} X_t(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ existiert,
kann X_T auf ganz Ω definiert werden:

$$\boxed{X_T(\omega) := \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega), & \text{für } \omega \in \{T < \infty\} \\ X_\infty(\omega), & \text{für } \omega \in \{T = \infty\} \end{cases}}$$

Sei nun $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ein ***filtrierter Raum***, d.h. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist eine Filtrierung von $\mathcal{F}$.

Definition (2.1)

Eine *Zufallszeit* T ist eine

$$\boxed{\begin{cases} (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\text{-}\textbf{Stoppzeit} & :\Leftrightarrow \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0 \\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\text{-}\textbf{Optionszeit} & :\Leftrightarrow \{T < t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0 \end{cases}}$$

1.2 Stoppzeiten (2/9)

Eine ***Zufallszeit*** ist eine $[0,\infty]$-wertige ZV: $T:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to ([0,\infty],\mathcal{B}([0,\infty]))$

Eine *Zufallszeit* T ist eine
- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-**Stoppzeit** $:\Leftrightarrow \quad \{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t,\ \forall t\geq 0$
- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-**Optionszeit** $:\Leftrightarrow \quad \{T< t\}\in\mathcal{F}_t,\ \forall t\geq 0$

Proposition (2.3)

a) T $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit $\Rightarrow$ T $(\mathcal{F}_t)_t$-Optionszeit

b) T $(\mathcal{F}_t)_t$-Optionszeit und $(\mathcal{F}_t)_t$ rechtsstetig $\Rightarrow$ T $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit

Beweis

a) $$\{T<t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{T\leq t-\frac{1}{n}\right\}}_{\in\mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}}\ \subset\ \mathcal{F}_t} \in\mathcal{F}_t$$

T Stoppzeit $\quad$ $(\mathcal{F}_t)_t$ **Filtrierung**

b) $$\{T\leq t\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \underbrace{\{T<t+\varepsilon\}}_{\in\mathcal{F}_{t+\varepsilon}} \in \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$$

$\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$

T Optionszeit $\quad$ $(\mathcal{F}_t)_t$**rechtsstetig**

Korollar (2.4) $\quad$ T $(\mathcal{F}_t)_t$-Optionszeit $\Leftrightarrow$ T $(\mathcal{F}_{t^+})_t$-Stoppzeit

Beweis $\quad$ Wie oben. Beachte für „$\Leftarrow$": $\mathcal{F}_{\left(t-\frac{1}{n}\right)^+} = \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{\left(t-\frac{1}{n}\right)+\varepsilon} \subset \mathcal{F}_t$

1.2 Stoppzeiten (3/9)

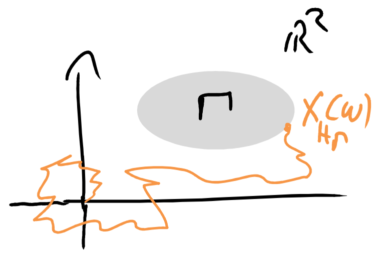
Eine ***Zufallszeit*** ist eine $[0,\infty]$-wertige ZV: $T:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to ([0,\infty],\mathcal{B}([0,\infty]))$

Eine *Zufallszeit* T ist eine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-**Stoppzeit** $:\Leftrightarrow \quad \{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t,\ \forall t\geq 0$

Beispiel: Ersteintrittszeit als Optionszeit/Stoppzeit

Definition (2.4)
Für einen gegebenen $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptierten stochastischen Prozess X mit rechtsstetigen Pfaden definieren wir für eine messbare Teilmenge $\Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die ***Ersteintrittszeit*** $\boldsymbol{H_\Gamma}$ *als :*

$$H_\Gamma(\omega) := \inf\{t\geq 0;\ X_t(\omega)\in\Gamma\}$$



Übung (2.6, 2.7)

$\Gamma\subset\mathbb{R}^d$ *offen*	$\Rightarrow$	H_Γ $(\mathcal{F}_t)_t$-Optionszeit
$\Gamma\subset\mathbb{R}^d$ *abgeschlossen und X mit **stetigen** Pfaden*	$\Rightarrow$	H_Γ $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit

Eigenschaften (2.9, 2.11)

T und S $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten $\Rightarrow$ $T+S$, $\min\{T,S\}$, $\max\{T,S\}$ $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten

$(T_n)_{n\geq 1}$ Folge von $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten $\Rightarrow$ $\sup_{n\geq 1}\{T_n\}$ $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit

… und falls $(\mathcal{F}_t)_t$ rechtsstetig $\Rightarrow$ $\limsup_{n\geq 1}\{T_n\}$, $\liminf_{n\geq 1}\{T_n\}$ $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten

1.2 Stoppzeiten (4/9)

Eine ***Zufallszeit*** ist eine $[0,\infty]$-wertige ZV: $T:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to([0,\infty],\mathcal{B}([0,\infty]))$

Eine *Zufallszeit* T ist eine $\boxed{(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\text{-}\textbf{Stoppzeit} \quad :\Leftrightarrow \quad \{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t,\ \forall t\geq 0}$

Eigenschaften (2.9, 2.11)

T und S $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten $\Rightarrow$ $T+S$, $\min\{T,S\}$, $\max\{T,S\}$ $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten

$(T_n)_{n\geq 1}$ Folge von $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten $\Rightarrow$ $\sup_{n\geq 1}\{T_n\}$ $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit

… und falls $(\mathcal{F}_t)_t$ rechtsstetig $\Rightarrow$ $\limsup_{n\geq 1}\{T_n\}$, $\liminf_{n\geq 1}\{T_n\}$ $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten

Beweis

$\{T+S\leq t\}=\{T+S>t\}^c \quad \Rightarrow$ nur z.z.: $\{T+S>t\}\in\mathcal{F}_t \quad t>0$

$$\{T+S>t\}=\{\underbrace{T=0}_{=\{T\leq 0\}},\ \underbrace{S>t}_{=\{S\leq t\}^c}\}\cup\{0<T<t,\ \underbrace{T+S>t}_{=\{S>t-T\}}\}\cup\underbrace{\{T>t,\ S=0\}}_{\in\mathcal{F}_t}\cup\{\underbrace{T\geq t}_{=\{T<t\}^c\in\mathcal{F}_t},\ S>0\}\in\boldsymbol{\mathcal{F}_t}$$

T Stoppzeit $\to\ \in\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_t$

$\in\mathcal{F}_t \leftarrow$ ***S Stoppzeit***

T Stoppzeit
$\Rightarrow$ **insb. *Optionszeit***

$$\boxed{\{0<T<t,\ T+S>t\}=\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}^+\\0<r<t}}\{\underbrace{0<r<T<t}_{=\underbrace{\{T>r\}}_{\in\mathcal{F}_r\subset\mathcal{F}_t}\cap\{T<t\}},\ \underbrace{S>t-r}_{\in\mathcal{F}_{t-r}\subset\mathcal{F}_t}\}\in\mathcal{F}_t}$$

1.2 Stoppzeiten (5/9)

Eine ***Zufallszeit*** ist eine $[0,\infty]$-wertige ZV: $T:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to([0,\infty],\mathcal{B}([0,\infty]))$

Eine *Zufallszeit* T ist eine $\boxed{(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\text{-}\textbf{Stoppzeit} \quad :\Leftrightarrow \quad \{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t,\ \forall t\geq 0}$

Definition (2.12) (Die σ-Algebra der T-Vergangenheit)

Für eine gegebene $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit T setze: $\boxed{\mathcal{F}_T:=\{A\in\mathcal{F}\,|\,A\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t\ \forall t\geq 0\}}$

Beobachtung / Übung (2.13)

$\mathcal{F}_T$ definiert eine σ-Algebra und T ist $\mathcal{F}_T$-messbar.

Im Spezialfall einer konstanten Stoppzeit $T(\omega):=t\ \forall\omega\in\Omega$ gilt: $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_t$

Lemma (2.15)

Für zwei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeiten T und S gilt: $A\in\mathcal{F}_S \quad\Rightarrow\quad A\cap\{S\leq T\}\in\mathcal{F}_T$

Insbesondere gilt also: $S\leq T$ auf Ω $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_S\subset\mathcal{F}_T$

Beweis

Sei $A\in\mathcal{F}_S$ und $t\geq 0$ beliebig. Dann gilt:

$$[A\cap\{S\leq T\}]\cap\{T\leq t\}=[A\cap\{S\leq \boldsymbol{t}\}]\cap\{T\leq t\}\cap\{\boldsymbol{S\leq T}\}$$

$$=\underbrace{[A\cap\{S\leq \boldsymbol{t}\}]}_{\in\mathcal{F}_t}\cap\underbrace{\{T\leq t\}}_{\in\mathcal{F}_t}\cap\underbrace{\{\boldsymbol{S\wedge t\leq T\wedge t}\}}_{\in\mathcal{F}_t}\in\boldsymbol{\mathcal{F}_t}$$

$A\in\mathcal{F}_S\longrightarrow$ $\qquad$ $\leftarrow S\wedge t$ und $T\wedge t$ sind $\mathcal{F}_t$-mb.

1.2 Stoppzeiten (6/9)

Eine ***Zufallszeit*** ist eine $[0,\infty]$-wertige ZV: $T:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to([0,\infty],\mathcal{B}([0,\infty]))$

Eine *Zufallszeit* T ist eine $\boxed{(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\text{-}\textbf{Stoppzeit} \quad :\Leftrightarrow \quad \{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t,\ \forall t\geq 0}$

Definition (2.12) (Die σ-Algebra der T-Vergangenheit)

Für eine gegebene $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit T setze: $\boxed{\mathcal{F}_T := \{A\in\mathcal{F} \mid A\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t\ \forall t\geq 0\}}$

Lemma (2.15)

Für zwei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeiten T und S gilt: $A\in\mathcal{F}_S \Rightarrow A\cap\{S\leq T\}\in\mathcal{F}_T$

Insbesondere gilt also: $S\leq T$ auf $\Omega \Rightarrow \mathcal{F}_S\subset\mathcal{F}_T$

Lemma (2.16)

Für zwei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeiten T und S gilt: $\boxed{\mathcal{F}_{T\wedge S} = \mathcal{F}_T\cap\mathcal{F}_S}$

$\mathcal{F}_T\cap\mathcal{F}_S$ beinhaltet u.a. die Mengen $\{T<S\}$, $\{T\leq S\}$, $\{S<T\}$, $\{S\leq T\}$, $\{T=S\}$

Beweis *Verwende vorheriges Lemma…*

Proposition (2.18)

Sei X ein bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ progressiv messbarer stochastischer Prozess und T eine $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit.
Dann ist die auf $\{T<\infty\}$ definierte ZV $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ $\mathcal{F}_T$-messsbar
und der „gestoppte Prozess" $(X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ ist bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ progressiv messbar.

1.2 Stoppzeiten (7/9)

Ein stochastischer Prozess X heißt **progressiv *messbar bzgl.*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t\geq 0$ die Abb.

$$X|_{[0,t]\times\Omega}:\ ([0,t]\times\Omega,\mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t)\to\left(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right),\qquad \textit{\textbf{messbar} ist.}$$
$$(s,\omega)\to X_s(\omega)$$

Proposition (2.18)

Sei X ein bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ progressiv messbarer stochastischer Prozess und T eine $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit.
Dann ist die auf $\{T<\infty\}$ definierte ZV $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ $\mathcal{F}_T$-messsbar
und der „gestoppte Prozess" $(X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ ist bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ progressiv messbar.

Beweis $Y := (X_{T\wedge s})_s:\ ([0,\infty)\times\Omega,\mathbb{B}([0,\infty)\otimes\mathcal{F})\to\left(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right),$

$$(s,\omega)\to X_{T\wedge s}(\omega) := X_{T(\omega)\wedge s}(\omega)$$

<u>Y progressiv messbar:</u>

$$Y|_{[0,t]\times\Omega}:\quad ([0,t]\times\Omega,\mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t)\to\left(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right),\quad \textit{\textbf{messbar?}}$$
$$(s,\omega)\to X_{T(\omega)\wedge s}(\omega)$$

1.2 Stoppzeiten (8/9)

Ein stochastischer Prozess X heißt **progressiv *messbar bzgl.*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$ die Abb.

$$X|_{[0,t]\times\Omega}: \ ([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right), \quad \textit{messbar ist.}$$
$$(s,\omega) \to X_s(\omega)$$

$$Y|_{[0,t]\times\Omega}: \quad ([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right), \quad \textit{messbar?}$$
$$(s,\omega) \to X_{T(\omega)\wedge s}(\omega)$$

Zerlege Y in:

$$([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) \ \to ([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) \ \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right),$$

$$(s,\omega) \qquad \to \qquad X_{T(\omega)\wedge s}(\omega) \qquad \textit{messbar!}$$

$$(s,\omega) \to (\underbrace{T(\omega)\wedge s}_{t'},\omega)$$

messbar,
da T Stoppzeit

$$(t',\omega) \to X_{t'}(\omega)$$

messbar,
da X progressive messbar

1.2 Stoppzeiten (9/9)

Ein stochastischer Prozess X heißt **progressiv *messbar bzgl.*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$ die Abb.

$$X|_{[0,t]\times\Omega}: \ ([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right), \quad \textit{messbar ist.}$$
$$(s,\omega) \to X_s(\omega)$$

Proposition (2.18)
Sei X ein bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ progressiv messbarer stochastischer Prozess und T eine $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit.
Dann ist die auf $\{T<\infty\}$ definierte ZV $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ $\mathcal{F}_T$-messsbar
und der „gestoppte Prozess" $(X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ ist bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ progressiv messbar.

Beweis $Y := (X_{T\wedge s})_s: \ ([0,\infty)\times\Omega, \mathbb{B}([0,\infty)\otimes\mathcal{F}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right),$
$$(s,\omega) \to X_{T\wedge s}(\omega) := X_{T(\omega)\wedge s}(\omega)$$

<u>Y progressiv messbar:</u> **gezeigt!**

Noch z.z.: <u>X_T ist $\mathcal{F}_T$ messbar</u> $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt: $\{X_T \in B\} \in \mathcal{F}_T$
$\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$ <u>$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \forall t \geq 0$ gilt: $\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$</u>

Es gilt: $\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} = \underbrace{\{X_{T\wedge t} \in B\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \boldsymbol{\mathcal{F}_t}$

Da $X_{T\wedge t}$ progressiv messbar! $\longrightarrow$ $\in \mathcal{F}_t$