Wahrscheinlichkeitstheorie II

Christian Wiesel

V5-109

Vorlesung vom 22.04.

1. Martingale, Stoppzeiten und Filtrierungen

1.1 Stochastische Prozesse und σ-Algebren

1.2 Stoppzeiten

Zusammenfassung & Vergleich mit zeitdiskretem Fall auf nächsten drei Folien

1.3 Martingale in stetiger Zeit

Zusammenfassung: Stochastische Prozesse & Messbarkeit

Ein stochastischer Prozess X heißt **progressiv *messbar bzgl.* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$**, falls $\forall t \geq 0$ die Abb.

$$X|_{[0,t]\times\Omega}\colon \left([0,t]\times\Omega, \mathbb{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t\right) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right),$$ ***messbar** ist.*

$\Downarrow$ $\Uparrow \exists$ *Modifikation* (1.12) $\Uparrow$ falls Pfade $t \to X_t(\omega)$ *rechtsstetig* (1.13)

Ein stochastischer Prozess X heißt ***messbar,*** falls die Abbildung

$$X\colon \left([0,\infty)\times\Omega, \mathbb{B}([0,\infty))\otimes\mathcal{F}\right) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right),$$ ***messbar** ist.*

$$(t,\omega) \to X_t(\omega)$$

X ist $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-***adaptiert*** $:\Leftrightarrow$ X_t ist $\mathcal{F}_t$- messbar $\forall t \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ $\forall t \geq 0$

T Stoppzeit

(2.18) Der „gestoppter Prozess“ $(X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ erbt die progressive Messbarkeit und die auf $\{T<\infty\}$ definierte ZV $\boldsymbol{X_T}(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ ist $\boldsymbol{\mathcal{F}_T}$**-messsbar**

Zusammenfassung: Stoppzeiten

Eine *Zufallszeit* T ist eine

$$\begin{cases} (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\text{-}\textbf{Stoppzeit} & :\Leftrightarrow \quad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0 \\ \Downarrow & \\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\text{-}\textbf{Optionszeit} & :\Leftrightarrow \quad \{T < t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{T \ (\mathcal{F}_t)_t\text{-Optionszeit} \ \Leftrightarrow \ T \ (\mathcal{F}_{t^+})_t\text{-Stoppzeit}}$$

Ersteintrittszeit $\boldsymbol{H_\Gamma}$ $\quad \boxed{H_\Gamma(\omega) := \inf\{t \geq 0; X_t(\omega) \in \Gamma\}}$ (X adaptiert und rechtsstetig)

$\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ *abgeschlossen und* X *mit* ***stetigen*** *Pfaden* $\Rightarrow$ H_Γ $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit

$\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ *offen* $\Rightarrow$ H_Γ $(\mathcal{F}_t)_t$-Optionszeit

---

$T, S, (T_n)_{n\geq 1}$ $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten $\Rightarrow$ $T+S,\quad T\wedge S,\quad T \vee S,\quad \sup_{n\geq 1}\{T_n\}$ $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten

… und falls $(\mathcal{F}_t)_t$ rechtsstetig $\Rightarrow$ $\limsup_{n\geq 1}\{T_n\},\quad \liminf_{n\geq 1}\{T_n\}$ $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten

---

σ-Algebra der T-Vergangenheit $\quad \boxed{\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0\}}$

$$\boxed{\mathcal{F}_{T\wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S} \ni \{T < S\}, \{T \leq S\}, \{T = S\}$$

insbesondere: $S \leq T$ auf $\Omega \ \Rightarrow \ \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$

Stochastische Prozesse, Filtrierungen und Stoppzeiten $\mathbb{N}$ vs. $\mathbb{R}^+$

$X_1: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}X_1^{-1}\right)$

	Diskrete Zeit $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$	Stetige Zeit $\mathbb{R}^+$
stochastischer Prozess X	$X \equiv (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$X \equiv (X_t)_{t\geq 0}$
Filtrierung	$(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$	$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \forall\, 0 \leq s < t$
von stoch. Prozess X ***erzeugte Filtrierung***	$\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_k \mid k \leq n) \subset \mathcal{F}$	$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s \mid s \leq t) \subset \mathcal{F}$
X an Filtrierung ***adaptiert****, falls*	X_n ist $\mathcal{F}_n$- *mb* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Updownarrow$ $\mathcal{F}_n^X \subset \mathcal{F}_n \ \forall t \geq 0$	X_t ist $\mathcal{F}_t$- *mb* $\forall t \geq 0$ $\Updownarrow$ $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0$
Zufallszeit	$T: (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \xi)$	$T: (\Omega, \mathcal{F}) \to ([0,\infty], \mathcal{B}([0,\infty]))$
Zufallszeit T ist **Stoppzeit** $:\Leftrightarrow$	$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$	$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0$
Zufallszeit T ist **Optionszeit** $:\Leftrightarrow$	$\{T < n\} \in \mathcal{F}_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$	$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0$
σ-Algebra der T-Vergangenheit $\mathcal{F}_T :=$	$\{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$	$\{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0\}$

Wahrscheinlichkeitstheorie II

Christian Wiesel
V5-109

1. Martingale, Stoppzeiten und Filtrierungen

1.1 Stochastische Prozesse und σ-Algebren

1.2 Stoppzeiten

1.3a Martingale in *diskreter* Zeit

Ausblick

	Diskrete Zeit $\mathbb{N}$	Stetige Zeit $\mathbb{R}^+$
Martingale	***1.3a***	
Beispiel	*Random Walk*	*Brownsche Bewegung*
Martingal-Ungleichungen	***1.3b***	
Martingal -Konvergenzsätze	***1.3c***	

Wdhl.: Bedingte Erwartungen und Filtrierungen

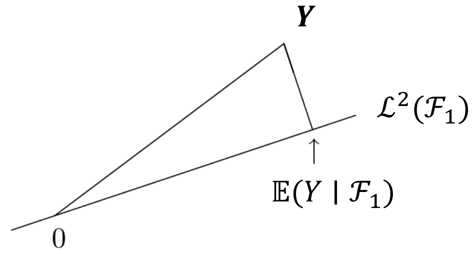
$Y: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right)$ Sei $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$.

$X_1 \coloneqq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_1)$ $\mathbb{P}$-f.s. definiert durch folgende Bedingungen:

$i)$ X_1 ist $\mathcal{F}_1$-mb
$ii)$ $\mathbb{E}(1_A X_1) = \mathbb{E}(1_A Y) \quad \forall A \in \mathcal{F}_1$

Interpretation

X_1 ist beste Approx. von Y bei Kenntnis von $\mathcal{F}_1$



Projektion von Y auf den Unterraum der $\mathcal{F}_1$-mb. ZV'en

Spezialfall: $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra endlich erzeugt:

$\Omega = \bigcup_k \Omega_k$ **disj.** $\mathcal{F}_1 \coloneqq \sigma(\Omega_1, \Omega_2, \dots)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_1) = \sum_i \frac{\mathbb{E}(1_{\Omega_i} Y)}{\mathbb{P}(\Omega_i)} \cdot 1_{\Omega_i}}$$

‚Vergröberung' von $\boldsymbol{Y}$ auf $\boldsymbol{\mathcal{F}_1}$

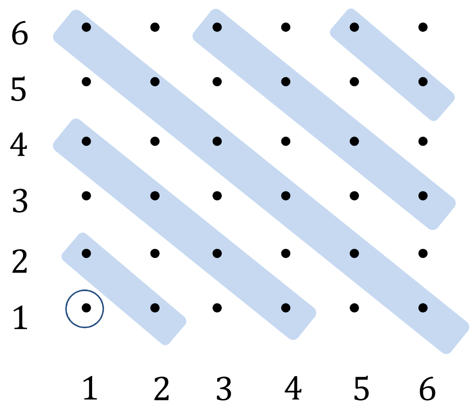
Konvention: „$\mathbb{P}$ –f.s." Mehrdeutigkeit wird nicht mehr explizit in Notation erwähnt

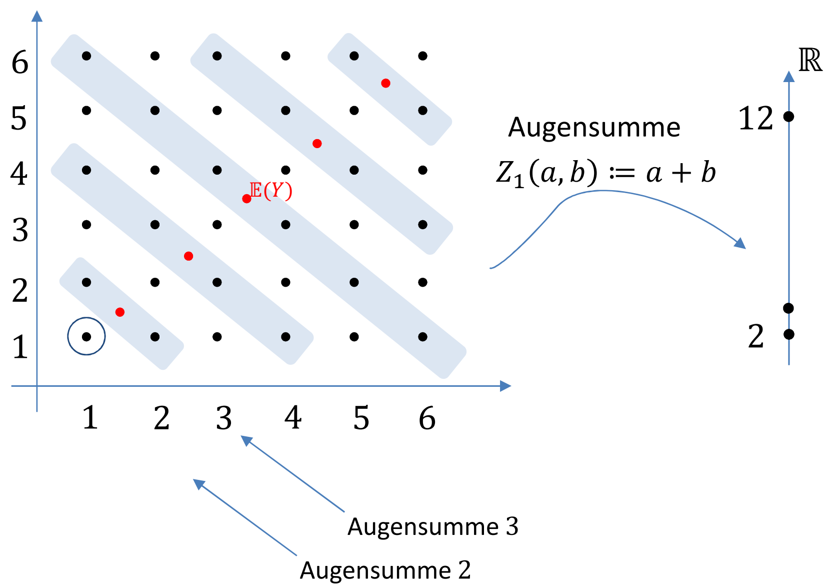
---

Beispiel 1: *Münzwurf mit rotem und blauem Würfel*

$\mathcal{F} \coloneqq \mathcal{P}(\Omega) \quad \mathbb{P}(\omega) \coloneqq \frac{1}{36} \forall \omega \in \Omega$

$\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\} \xrightarrow{Y = id_\Omega : (a,b) \to (a,b)} \mathbb{R}^2$





$\sigma(Z_1)$

$\Omega_1 \coloneqq \{(1,1)\} \in \sigma(Z_1)$

$\Omega_2 \coloneqq \{(1,2), (2,1)\} \in \sigma(Z_1)$

$\mathbb{E}(Y \mid \sigma(Z_1)) = ?$

$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra endlich erzeugt!
$\Omega = \bigcup_k \Omega_k$ **disj.**

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_1) \coloneqq \sigma(Z_1)) = \sum_i \frac{\mathbb{E}(1_{\Omega_i} Y)}{\mathbb{P}(\Omega_i)} \cdot 1_{\Omega_i}$$

Beispiel 2 : $\Omega := [0,1]$

Spezialfall: $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra endlich erzeugt:

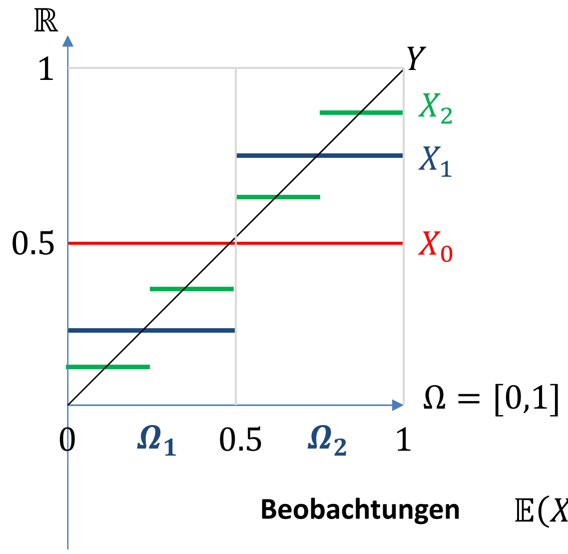
$\Omega = \bigcup_k \Omega_k$ disj. $\mathcal{F}_n := \sigma(\Omega_1, \Omega_2, \dots)$

$$\Rightarrow \boxed{X_n = \mathbb{E}(\,Y \mid \mathcal{F}_n\,) = \sum_i \frac{\mathbb{E}(1_{\Omega_i} Y)}{\mathbb{P}(\Omega_i)} \cdot 1_{\Omega_i}}$$

$$Y := id_\Omega : (\Omega := [0,1], \mathcal{F}, \lambda) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\,)$$

$$\omega \to \omega$$

$$\Rightarrow \ \sigma(Y) = \mathcal{B}([0,1]) = \mathcal{F}$$



$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \boldsymbol{\Omega}\} \Rightarrow \mathbb{E}(\,\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{\mathcal{G}}\,) = \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}) = \mathbf{0.5}$

$\mathcal{F}_1 = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2)$

$\mathcal{F}_2 = \cdots$

Beobachtungen $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X_3) = \cdots = \mathbb{E}(Y)$

$\mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1) = X_1$

1.3a Martingale in diskreter Zeit (1)

Motivation:
Vergröberung/Approximation einer nicht direkt zugänglichen ZV

Sei eine ZV $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ gegeben: $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\,)$

Sei weiterhin $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ eine Filtrierung von $\mathcal{F}$. d.h. $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$

Definiere nun einen stoch. Prozess $X = (X_n)_n$ durch:

$$\boxed{X_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)}$$

Vergröberung von Y auf $\mathcal{F}_n$
Beste Approx. von Y bei Kenntnis von $\mathcal{F}_n$

Beobachtung

$i)$ $X_n \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}_n)$, d.h. X ist adaptiert und es gilt $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n$

$ii)$ $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\,Y \mid \mathcal{F}_n\,) \mid \mathcal{F}_m) \ = \mathbb{E}(\,Y \mid \mathcal{F}_m) \ =: X_m \qquad \forall n \geq m$

Definition (Martingale)

Ein $(\mathcal{F}_n)_n$- **adaptierter** stoch. Prozess $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n$ heißt

Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) \ \forall n$
$konstant$

Beobachtung

Für ein Martingal X gilt $\quad \forall n \geq m$: $\quad \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \overset{\mathbb{E}(\cdot)}{\Rightarrow} \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m))}_{= \mathbb{E}(X_n)} = \mathbb{E}(X_m)$

1.3a Martingale in diskreter Zeit (2)

Definition (Martingale)

Ein $(\mathcal{F}_n)_n$- **adaptierter** stoch. Prozess $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n$ heißt

Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) \forall n$ *konst. Erwartungswert* $\Leftarrow$?

$\Updownarrow$

Charakterisierung $\boxed{\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) \text{ für alle } \textit{\textbf{beschränkten}} \text{ Stoppzeiten } \tau}$ *Erwartungswert konstant in ‚**starkem**' Sinne*

Beweis

" $\Downarrow$ " *Sei $\tau \leq n$ eine beschränkte* Stoppzeit.

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} 1_{\{\tau=k\}} X_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left(1_{\{\tau=k\}} X_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left(1_{\{\tau=k\}} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_k)\right)$$

$\mathcal{F}_k - mb.$

$X_k = \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_k)$ (da $k \leq n$)

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left(1_{\{\tau=k\}} X_n\right) = \mathbb{E}(X_n)$$

$$= \mathbb{E}(X_0)$$

1.3a Martingale in diskreter Zeit (3)

Definition

Ein $(\mathcal{F}_n)_n$- **adaptierter** stoch. Prozess $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n$ heißt

Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) \forall n$ *konst. Erwartungswert* $\Leftarrow$?

$\Updownarrow$

Charakterisierung $\boxed{\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) \text{ für alle } \textit{\textbf{beschränkten}} \text{ Stoppzeiten } \tau}$ *Erwartungswert konstant in ‚**starkem**' Sinne*

Beweis

" $\Uparrow$ " *Seien $n \geq m$* gegeben.

1. Schritt: für $A \in \mathcal{F}_m$ definiert $\tau := m \cdot 1_{A^c} + n \cdot 1_A$ eine (beschränkte) $(\mathcal{F}_n)_n$-Stoppzeit

denn

$$\{\tau \leq k\} = \left\{\begin{array}{ll} \emptyset, & 0 \leq k \leq m-1 \\ A^c, \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_k & m \leq k \leq n-1 \\ \Omega, & n \leq k \end{array}\right\} \in \mathcal{F}_k$$

2. Schritt: $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(X_m + (X_n - X_m) \mid \mathcal{F}_m) = X_m + \underbrace{\mathbb{E}(\overbrace{X_n - X_m}^{\text{Inkrement = ‚Zuwachs'}} \mid \mathcal{F}_m)}_{\textbf{z.z.}: \, = 0} = X_m$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(\cancel{X_m \cdot 1_{A^c}} + X_n \cdot 1_A) \\ \text{Vor.} \parallel \\ \mathbb{E}(X_0) \\ \text{Vor.} \parallel \\ \mathbb{E}(X_m) = \mathbb{E}(\cancel{X_m \cdot 1_{A^c}} + X_m \cdot 1_A) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}\left((X_n - X_m) \cdot 1_A\right) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}_m}$$

1.3a Martingale in diskreter Zeit (4)

$X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Sei nun $X \equiv (X_n)_{n\geq 1}$ ein zeitdiskreter, ***reellwertiger*** stoch. Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Sei weiterhin eine Filtrierung $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ von $\mathcal{F}$ gegeben.

Definition (‚Smartingale')

Ein $(\mathcal{F}_n)_n$- **adaptierter** stoch. Prozess $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n$ heißt

$\forall n \geq m$

Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(X_m)$ $wachsend$

Supermartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \leq X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_m)$ $fallend$

$\Leftrightarrow$ $(-X_n)_n$ ist ***Submartingal*** bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$

Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$ $konstant$

Beobachtung

Für ein Submartingal X gilt $\forall n \geq m$: $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq X_m \overset{\mathbb{E}(\cdot)}{\Rightarrow} \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m))}_{= \mathbb{E}(X_n)} \geq \mathbb{E}(X_m)$

1.3a Martingale in diskreter Zeit (5)

$X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Definition

Ein $(\mathcal{F}_n)_n$- **adaptierter** stoch. Prozess $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n$ heißt

$\forall n \geq m$

Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(X_m)$ $wachsend$

Supermartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \leq X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_m)$ $fallend$

Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$ $konstant$

$\Updownarrow$

Charakterisierung

$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ $(*)$

für alle ***beschränkten*** Stoppzeiten τ

Bemerkung

Die Charakterisierung $(*)$ kann verallgemeinert werden zu:

Ein $(\mathcal{F}_n)_n$- **adaptierter** stoch. Prozess $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ $\forall n$ ist ein

X Martingal und $\tau \leq n$

$\mathbb{E}(X_\tau) = \cdots = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$

$\left.\begin{array}{r} \textbf{\textit{Submartingal}} \\ \textbf{\textit{Martingal}} \\ \textbf{\textit{Supermartingal}} \end{array}\right]$ bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_\tau) \begin{bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{bmatrix} \mathbb{E}(X_{\tau_{max}})}$ für alle ***beschränkten*** Stoppzeiten τ

d.h. $\tau_{max} := \max\{\tau(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \in \mathbb{R}^+$

1.3a Martingale in diskreter Zeit (6)

Submartingal: $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq X_m \;\; \forall n \geq m$

Beispiel: Verallgemeinerter Random Walk als Smartingal

Sei X_0 eine rellwertige, integrierbare ZV ('zufälliger Startpunkt', z.B. $X_0 \coloneqq x_0$ konst.) und sei $(Z_n)_n$ eine Folge reellwertiger, integrierbarer **uiv** ZV'en, unabhängig von X_0.

Setze $\mu \coloneqq \mathbb{E}(Z_1)$ und definiere $X \coloneqq (X_n)_{n\geq 1}$ durch

$$\boxed{X_n \coloneqq X_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k}$$

Setze $\mathcal{F}_n \coloneqq \mathcal{F}_n^X \coloneqq \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) \subset \mathcal{F}$

Behauptung

Der $(\mathcal{F}_n^X)_n$-adaptierte und integrierbare Prozess X ist ein $\left\{\begin{matrix} \textit{Submartingal} \\ \textit{Martingal} \\ \textit{Supermartingal} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \mu \geq 0 \\ \mu = 0 \\ \mu \leq 0 \end{matrix}\right\}$

Beweis

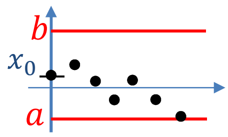
Inkrement $= Z_{m+1} + \dots + Z_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_m$

$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(X_m + (X_n - X_m) \mid \mathcal{F}_m) = X_m + \underbrace{\mathbb{E}(X_n - X_m \mid \mathcal{F}_m)}_{\substack{= \mathbb{E}(Z_{m+1} + \dots + Z_n) \\ = (n-m)\cdot\mu}} = X_m + \underline{(n-m)\cdot\mu}$$

z.B.: $1 = \underbrace{\mathbb{P}(Z_1 = +1)}_{=: p} + \underbrace{\mathbb{P}(Z_1 = -1)}_{= 1-p}$

$\Rightarrow \mu = (+1)\cdot p + (-1)\cdot(1-p) = 2p - 1 = 0 \Leftrightarrow p = 1/2$

1.3a Martingale in diskreter Zeit (7)



Beispiel: Random Walk ***„Flucht aus Intervall"***

Sei $x_0 \in \mathbb{Z}$. ein beliebiger Startpunkt, $(Z_n)_n$ eine $\{\pm 1\}$-wertige Folge, integrierbarer **uiv** ZV'en.

Wir verlangen nun $\mu \coloneqq \mathbb{E}(Z_1) = 0$, d.h. $X_n \coloneqq x_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k$ definiert ein $(\mathcal{F}_n^X)_n$-**Martingal**.

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < x_0 < b$ gegeben.

$$\boxed{\begin{matrix} \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) \\ \text{für alle } \textbf{\textit{beschränkten}} \text{ Stoppzeiten } \tau \end{matrix}} \quad (*)$$

Frage: Mit welcher Wkt. trifft $X \coloneqq (X_n)_n$ zuerst auf die rechte Grenze b? $p \coloneqq \mathbb{P}\left(X_{\tau_{a,b}} = b\right)$?

Lösung: Definiere die Stoppzeit $\tau_{a,b} \coloneqq \min\{n \mid X_n \in \{a, b\}\}$,

$\boxed{\text{Annahme: Sei } Z \text{ s.d. } \tau_{a,b}(\omega) < \infty \;\; \forall \omega \in \Omega}$ $\Rightarrow \Omega = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \{\tau_{a,b} \leq M\}$

Auf $\{\boldsymbol{\tau_{a,b} \leq M}\}$ lässt sich nun $(*)$ mit $\tau \coloneqq \tau_{a,b} \leq M$ anwenden: ...und dann limes $M \to \infty$

$$\mathbb{E}\left(X_{\tau_{a,b}}\right) = \underbrace{\mathbb{P}\left(X_{\tau_{a,b}} = a\right)}_{= (1-p)} \cdot a + \underbrace{\mathbb{P}\left(X_{\tau_{a,b}} = b\right)}_{= p} \cdot b = p \cdot (b-a) + a$$

$(*)\;\; \parallel$

$\mathbb{E}(X_0) = x_0$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{x_0 - a}{b - a}}$$

(unabhängig von M!)

1.3a Martingale in diskreter Zeit (8)

Sei $(X_n)_n$ ein $(\mathcal{F}_n)_n$-Martingal, d.h. es gilt

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \quad \forall n \geq m} \; (\#) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) \\ \text{für alle } \textbf{\textit{beschränkten}} \text{ Stoppzeiten } \tau \end{array}} \; (*)$$

Wir zeigen nun, dass die Eigenschaft (#) sogar allgemeiner für beschränkte Stoppzeiten gilt:

Doob's optionaler Stoppsatz

Falls $(X_n)_n$ ein $(\mathcal{F}_n)_n$ - Martingal $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma \quad \begin{array}{c} \forall\, \sigma \leq \tau \leq M < \infty \\ (\mathcal{F}_n)_n \text{ - } \textbf{Stoppzeiten} \end{array}}$

Kandidat für Bed. Erwartung auf L.S.

Beweis

1. Schritt: X_τ und X_σ sind integrierbar:

$$|X_\tau| = \left| \sum_{k=0}^{M} X_k \, 1_{\{\tau=k\}} \right| \leq \sum_{k=0}^{M} |X_k| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}),$$ da alle X_k nach Voraussetzung intbar

2. Schritt: X_σ ist $\mathcal{F}_\sigma$- messbar

3. Schritt: $\mathbb{E}(1_A X_\sigma) = \mathbb{E}(1_A X_\tau) \quad \forall\, A \in \mathcal{F}_\sigma$

1.3a Martingale in diskreter Zeit (9)

Doob's optionaler Stoppsatz

$(X_n)_n$ $(\mathcal{F}_n)_n$ - Martingal $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma \quad \begin{array}{c} \forall\, \sigma \leq \tau \leq M < \infty \\ (\mathcal{F}_n)_n \text{ - } \textbf{Stoppzeiten} \end{array}}$

Beweis

1. Schritt: X_τ und X_σ sind integrierbar!

2. Schritt: X_σ ist $\mathcal{F}_\sigma$- messbar: *(Vergleich **(2.18)**: X_T ist $\mathcal{F}_T$ messbar für progr. mb. $(X_t)_{t\geq 0}$)*

d.h.: $\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{X_\sigma \in C\} \in \mathcal{F}_\sigma \overset{\text{Def. } \mathcal{F}_\sigma}{\Leftrightarrow} \{X_\sigma \in C\} \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

$$X_\sigma = \sum_{k=0}^{M} X_k \, 1_{\{\sigma=k\}} \qquad \Rightarrow \{X_\sigma \in C\} \cap \{\sigma \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{M\wedge n} \underbrace{\{X_k \in C\}}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n} \cap \cancel{\{k \leq n\}} \cap \underbrace{\{\sigma = k\}}_{\sigma \text{ Stoppzeit!} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n} \in \boldsymbol{\mathcal{F}_n}$$

$\Omega = \bigcup_{k=0}^{M} \{\sigma = k\}$

X adaptiert!

Beachte: $\{\sigma = k\} = \{\sigma \leq k\} \cap \{\sigma < k\}^c$

3. Schritt: $\mathbb{E}(1_A X_\sigma) = \mathbb{E}(1_A X_\tau) \quad \forall\, A \in \mathcal{F}_\sigma$

Sei $A \in \mathcal{F}_\sigma$. $\Rightarrow$ $\boxed{R := 1_A \cdot \sigma \; + \; 1_{A^c} \cdot \tau}$ ebenfalls beschränkte ($\leq M$) Stoppzeit:

$\boldsymbol{\sigma \leq \tau} \rightarrow \underset{\mathcal{F}_\tau}{\cap}$

$$\{R \leq k\} = \underbrace{(A \cap \{\sigma \leq k\})}_{A \in \mathcal{F}_\sigma \rightarrow \in \mathcal{F}_k} \cup \underbrace{(A^c \cap \{\tau \leq k\})}_{A^c \in \mathcal{F}_\tau \rightarrow \in \mathcal{F}_k} \in \boldsymbol{\mathcal{F}_k}$$

$(X_n)_n$ $(\mathcal{F}_n)_n$ - Martingal:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) \\ \text{für } \textbf{\textit{beschränkte}} \text{ Stoppzeiten } \tau \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}(X_R) = \mathbb{E}(1_A \cdot X_\sigma \cdot \cancel{+1_{A^c} \cdot X_\tau}) \\ \quad \| \\ \mathbb{E}(X_0) \\ \quad \| \\ \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(1_A \cdot X_\tau \cdot +\cancel{1_{A^c} \cdot X_\tau}) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\mathbb{E}(1_A \cdot (X_\sigma - X_\tau)) = 0}$$

$\forall A \in \mathcal{F}_\sigma$