Wahrscheinlichkeitstheorie II

Vorlesung vom 24.04.

Christian Wiesel

V5-109

1. Martingale, Stoppzeiten und Filtrierungen

1.1 Stochastische Prozesse und σ-Algebren

1.2 Stoppzeiten

1.3 Martingale

1.3a Martingale in *diskreter* Zeit

1.3b Martingal-Ungleichungen

Wdhl. (1): Definition und Charakterisierung von Martingalen $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Definition

Ein $(\mathcal{F}_n)_n$- **adaptierter** stoch. Prozess $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n$ heißt

Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(X_m)$ $\forall n \geq m$ *wachsend*

Supermartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \leq X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_m)$ *fallend*

Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$ *konstant*

$\Updownarrow$

$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ für alle ***beschränkten*** Stoppzeiten τ $\quad (*)$

Beispiel

$$\left.\begin{array}{l} Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}), \\ X_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \end{array}\right\} \Rightarrow (X_n)_n \text{ Martingal}$$

Charakterisierung

Ein $(\mathcal{F}_n)_n$- **adaptierter** stoch. Prozess $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty\ \forall n$ ist ein

$$\left.\begin{array}{r} \textit{Submartingal} \\ \textit{Martingal} \\ \textit{Supermartingal} \end{array}\right] \text{bzgl. } (\mathcal{F}_n)_n \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbb{E}(X_\tau) \begin{bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{bmatrix} \mathbb{E}(X_{\tau_{max}})}$$

für alle ***beschränkten*** Stoppzeiten τ
d.h. $\tau_{max} := \max\{\tau(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \in \mathbb{R}^+$

Wdhl. (2): Relation zwischen Submartingalen und Martingalen

$X_n: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Definition

Ein $(\mathcal{F}_n)_n$- **adaptierter** stoch. Prozess $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n$ heißt

$\forall n \geq m$

Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(X_m)$ *wachsend*

Supermartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \leq X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_m)$ *fallend*

Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ $:\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \quad \forall n \geq m}$ $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$ *konstant*

$\Updownarrow$

$\boxed{\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)}$ für alle ***beschränkten*** Stoppzeiten τ $(*)$

Beispiel

$\left.\begin{array}{l} Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}), \\ X_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \end{array}\right\} \Rightarrow (X_n)_n$ Martingal

---

<u>Doob'sche Martingalzerlegung</u>

$(X_n)_n$ $(\mathcal{F}_n)_n$ - Submartingal $\underset{\text{eindeutig}}{\overset{\mathbb{P}\text{-f.s.}}{\Rightarrow}}$ $\boxed{X_n = X_0 + M_n + A_n}$ $(M_0 = A_0 = 0)$

Martingal (M_n), wachsend, $(\mathcal{F}_{n-1})_n$ - adaptiert (A_n)

1.3a Martingale in diskreter Zeit (10)

Sei $(X_n)_n$ ein $(\mathcal{F}_n)_n$-**Sub**martingal, d.h. es gilt $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq X_m \quad \forall n \geq m}$

Jedes Submartingal lässt sich **eindeutig** zerlegen in ein Martingal und einen wachsenden Prozess:

<u>Doob'sche Martingalzerlegung</u>

$(X_n)_n$ $(\mathcal{F}_n)_n$ - Submartingal $\Rightarrow$ $\exists$ $(\mathcal{F}_n)_n$ - Martingal $(M_n)_n$

$\mathcal{F}_{-1} := \{\emptyset, \Omega\}$ $\qquad$ $\exists$ $(\mathcal{F}_{n-1})_n$ - adaptierten, **wachsenden** stoch. Prozess $(A_n)_n$

(A_n ist $\mathcal{F}_{n-1}$ - mb.) $\qquad$ ($A_{n+1} \geq A_n$, $\mathbb{P}$-f.s.)

s.d.: $\boxed{X_n = X_0 + M_n + A_n}$ $(M_0 = A_0 = 0)$

Diese Zerlegung ist $\mathbb{P}$-f.s. **eindeutig**!

Beweis

1. Schritt: *Existenz*

Definiere $(A_n)_n$ durch: $\underbrace{A_0 := 0,}_{\mathcal{F}_{-1}\text{-mb.}}$ $\quad A_{n+1} := \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})}_{\geq 0} \overset{\mathbb{P}\text{-f.s.}}{\geq} A_n \overset{\mathbb{P}\text{-f.s.}}{\geq} 0$

$(X_n)_n$ Submartingal! $\qquad$ & A_{n+1} ist $\mathcal{F}_n$ - m.b.!

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A_n}$ ist $\boldsymbol{\mathcal{F}_{n-1}}$ **- mb.** und **wachsend**

Noch z.z.: $\boldsymbol{M_n := X_n - X_0 - A_n}$ definiert ein Martingal!

1.3a Martingale in diskreter Zeit (11)

Sei $(X_n)_n$ ein $(\mathcal{F}_n)_n$-**Sub**martingal, d.h. es gilt $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq X_m \quad \forall n \geq m}$

Doob'sche Martingalzerlegung

Martingal wachsend, $(\mathcal{F}_{n-1})_n$ - adaptiert

$(X_n)_n$ $(\mathcal{F}_n)_n$ - Submartingal $\overset{\mathbb{P}\text{-f.s.}}{\underset{\text{eindeutig}}{\Rightarrow}}$ $\boxed{X_n = X_0 + M_n + A_n}$ $(M_0 = A_0 = 0)$

Beweis

1. Schritt: *Existenz*

Definiere $(A_n)_n$ durch: $A_0 := 0,$ $\quad A_{n+1} := \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})}_{\geq 0} \overset{\mathbb{P}\text{-f.s.}}{\geq} A_n \geq 0$

$(X_n)_n$ Submartingal!

& A_{n+1} ist $\mathcal{F}_n$ - m.b.!

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A_n}$ ist $\boldsymbol{\mathcal{F}_{n-1}}$ **- mb.** und **wachsend**

Noch z.z.:

$\boldsymbol{M_n} := \underbrace{\boldsymbol{X_n}}_{\mathcal{F}_n \text{ mb.}} - \boldsymbol{X_0} - \underbrace{\boldsymbol{A_n}}_{\mathcal{F}_{n-1} \text{ mb.}}$ definiert ein Martingal!

$i)$ $\Rightarrow$ M_n ist $\mathcal{F}_n$ - mb. (...und integrierbar)

$ii)$ Martingaleigenschaft: $\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \cancel{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})} - X_0 - \underbrace{A_n}_{= A_{n-1} + \underbrace{\mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1})}_{= \cancel{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})} - X_{n-1}}} = X_{n-1} - X_0 - A_{n-1} = M_{n-1}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \quad (*)$

iterieren:

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-2}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-2}) \overset{(*)}{=} \mathbb{E}(M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-2}) \overset{(*)}{=} M_{n-2}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_m) = M_m \quad \forall\, n \geq m$

1.3a Martingale in diskreter Zeit (12)

Sei $(X_n)_n$ ein $(\mathcal{F}_n)_n$-**Sub**martingal, d.h. es gilt $\boxed{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq X_m \quad \forall n \geq m}$

Doob'sche Martingalzerlegung

Martingal wachsend, $(\mathcal{F}_{n-1})_n$ - adaptiert

$(X_n)_n$ $(\mathcal{F}_n)_n$ - Submartingal $\overset{\mathbb{P}\text{-f.s.}}{\underset{\text{eindeutig}}{\Rightarrow}}$ $\boxed{X_n = X_0 + M_n + A_n}$ $(M_0 = A_0 = 0)$

Beweis

1. Schritt: *Existenz*

Definiere $(A_n)_n$ durch: $A_0 := 0,$ $\quad A_{n+1} := \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})}_{\geq 0} \overset{\mathbb{P}\text{-f.s.}}{\geq} A_n \geq 0$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A_n}$ ist $\boldsymbol{\mathcal{F}_{n-1}}$ **- mb.** und **wachsend**

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{M_n} := \boldsymbol{X_n} - \boldsymbol{X_0} - \boldsymbol{A_n}$ $\quad n \geq 0$ definiert ein Martingal!

2. Schritt: *Eindeutigkeit*

Martingal wachsend, $(\mathcal{F}_{n-1})_n$ - adaptiert

Angenommen es gelte $\quad X_n = \cancel{X_0} + M_n + A_n = \cancel{X_0} + L_n + C_n \quad \forall n$

$\Rightarrow$ $M_n - L_n = C_n - A_n$ $\quad \mathcal{F}_{n-1}$ - mb.! $\forall n$

$\Rightarrow$ $M_n - L_n = \mathbb{E}(M_n - L_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \overset{\text{Martingal!}}{=} M_{n-1} - L_{n-1} = \cdots = M_0 - L_0 = 0 \quad \mathbb{P}$ –fs.

$\Rightarrow$ $M_n = L_n \qquad C_n = A_n \qquad \mathbb{P}$ – fs.

1.3a Martingale in diskreter Zeit (13)

„Erhalt der Submartingaleigenschaft"

Beobachtung $(X_n)_n$ adaptiert, integrierbar und **wachsend** $(X_{n+1} \geq X_n, \mathbb{P}\text{-fs. } \forall n)$ $\Rightarrow$ $(X_n)_n$ Submartingal

Beweis $n \geq m \Rightarrow X_n \geq X_m$, $\mathbb{P}$-fs $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq \mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{F}_m) = X_m$

Proposition 1
$(M_n)_n$ Martingal
$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***konvex***, mb., $\varphi(M_n)$ intbar $\forall n$
$\Rightarrow$ $(\varphi(M_n))_n$ Submartingal

Beweis Adaptierheit und Integrierbarkeit folgen unmittelbar aus Voraussetzungen an φ

Submartingaleigenschaft: $\mathbb{E}(\varphi(M_n) \mid \mathcal{F}_m) \overset{\text{„Jensen'sche Ungleichung für bedingte Erwartungen"}}{\geq} \varphi(\underbrace{\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_m)}_{= M_m \ ((M_n)_n \text{ Martingal})}) = \varphi(M_m)$

Proposition 2
$(X_n)_n$ **Sub**martingal
$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***konvex***, **mon. wachsend**, mb., $\varphi(M_n)$ intbar $\forall n$
$\Rightarrow$ $(\varphi(X_n))_n$ Submartingal

Beweis Submartingaleigenschaft: $\mathbb{E}(\varphi(X_n) \mid \mathcal{F}_m) \overset{\text{Jensen}}{\geq} \varphi(\underbrace{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m)}_{\text{Submartingal } \geq X_m}) \overset{\varphi \text{ mon. wachsend!}}{\geq} \varphi(X_m)$

Beispiele

$(M_n)_n$ Martingal $\overset{\text{Prop.1}}{\Rightarrow}$ $(|M_n|)_n$ Submartingal $\overset{\text{Beob.}}{\Rightarrow}$ $(M_n^*)_n$ Submartingal, mit $M_n^* := \sup_{k \leq n} |M_k|$ wachsend!

$(M_n)_n$ Martingal mit $M_n \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_n)$ $\overset{\text{Prop.1}}{\Rightarrow}$ $(M_n^2)_n$ Submartingal

$\varphi(x) := x^2$ konvexe Abbildung

1.3a Martingale in diskreter Zeit (14)

„Erhalt der Submartingaleigenschaft"

Beobachtung $(X_n)_n$ adaptiert, integrierbar und wachsend $\Rightarrow$ $(X_n)_n$ Submartingal

---

Proposition 1
$(M_n)_n$ Martingal
$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***konvex***, mb., $\varphi(M_n)$ intbar $\forall n$
$\Rightarrow$ $(\varphi(M_n))_n$ Submartingal

Proposition 2
$(X_n)_n$ **Submartingal**
$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***konvex***, **mon. wachsend**, mb., $\varphi(M_n)$ intbar $\forall n$
$\Rightarrow$ $(\varphi(X_n))_n$ Submartingal

Proposition 3
$(X_n)_n$ Submartingal
$\boldsymbol{\tau}$ Stoppzeit
$\Rightarrow$ $(X_{n\wedge\tau})_n$ Submartingal

„gestopptes Submartingal wieder Submartingal"

Beweis

Submartingaleigenschaft: $\mathbb{E}(X_{(n+1)\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\underbrace{X_\tau}_{\mathcal{F}_n\text{-mb. auf } \{\tau \leq n\}} \cdot \underbrace{1_{\{\tau < n+1\}}}_{= \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n} + X_{n+1} \cdot \underbrace{1_{\{\tau \geq n+1\}}}_{= \{\tau > n\} = \{\tau \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n} \mid \mathcal{F}_n)$

$= \underbrace{X_\tau \cdot 1_{\{\tau \leq n\}}}_{= X_{n\wedge\tau}} + 1_{\{\tau > n\}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)}_{\geq X_n = X_{n\wedge\tau}} \geq \boldsymbol{X_{n\wedge\tau}}$

iterieren:

$\Rightarrow \mathbb{E}(X_{n\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_m) \geq X_{m\wedge\tau} \ \forall \ n \geq m$

Korollar
$(X_n)_n$ Submartingal
$\sigma \leq \tau \leq N$ beschränkte Stoppzeiten
$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X_\sigma) \leq \mathbb{E}(X_\tau)$

Beweis

$(Y_n)_n := (X_{n\wedge\tau})_n$ Submartingal $\Rightarrow \mathbb{E}(X_\sigma) = \mathbb{E}(X_{\sigma\wedge\tau}) = \mathbb{E}(Y_\sigma) \overset{\text{Charakterisierung von Submartingalen}}{\leq} \mathbb{E}(Y_N) = \mathbb{E}(X_{N\wedge\tau}) = \mathbb{E}(X_\tau)$

1.3b Martingal-Ungleichungen (1)

Markov – Ungleichung $\Rightarrow \mathbb{P}(|M_n| \geq h) \leq \frac{1}{h}\mathbb{E}(|M_n|)$

1. Doob'sche Martingal-Ungleichung

$(M_n)_n$ Martingal oder *positives* Submartingal $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{P}\left(\underbrace{\sup_{k\leq n}|M_k|}_{M_n^*} \geq h\right) \leq \frac{1}{h}\mathbb{E}(|M_n|)}$ $\forall h \geq 0$

Beweis

1. Schritt: $(M_n)_n$ Martingal oder *positives* Submartingal $\overset{\text{Prop.1}}{\Rightarrow}$ $(X_n)_n := (|M_n|)_n$ Submartingal

Sei $h \geq 0$ gegeben.

2. Schritt: $\sigma := \min\{k \in \mathbb{N} \mid X_k \geq h\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ $(\mathcal{F}_n)_n$-Stoppzeit! $\Rightarrow$ $\tau := \sigma \wedge n$, $\boldsymbol{\tau_{max} \leq n}$ **beschränkte** Stoppzeit!

denn: $\{\sigma \leq n\} = \{X_k \geq h \text{ für ein } k \leq n\} = \bigcup_{k\leq n} \underbrace{\{X_k < h\}^c}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

$(X_k)_k$ adaptiert

3. Schritt: $(X_n)_n$ Submartingal

siehe Charakterisierung: *„Erwartungswert* ***wachsend*** *im* ***starken*** *Sinne"*

$$\mathbb{E}(|M_\tau|) = \mathbb{E}(X_\tau) \leq \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(|M_n|)$$

4. Schritt:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\leq n}|M_k| \geq h\right) = \mathbb{P}(\sigma \leq n) \leq \mathbb{E}\Big(1_{\{\sigma\leq n\}} \cdot \underbrace{\frac{|M_\sigma|}{h}}_{\geq 1}\Big) \overset{\tau = \sigma \text{ auf } \{\sigma \leq n\}}{=} \mathbb{E}\Big(\cancel{1_{\{\sigma\leq n\}}} \cdot \frac{|M_\tau|}{h}\Big) \leq \frac{1}{h}\mathbb{E}(|M_\tau|) \overset{3. Schritt}{\leq} \frac{1}{h}\mathbb{E}(|M_n|)$$

1.3b Martingal-Ungleichungen (2)

1. Doob'sche Martingal-Ungleichung

$M_n^* := \sup_{k\leq n} |M_k|$

$(M_n)_n$ Martingal oder *positives* Submartingal $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{P}(M_n^* \geq h) \equiv \mathbb{P}\left(\sup_{k\leq n}|M_k| \geq h\right) \overset{!}{\leq} \frac{1}{h}\mathbb{E}(|M_n|) \quad \forall h \geq 0}$

2. Doob'sche Martingal-Ungleichung

$(M_n)_n$ Martingal oder *positives* Submartingal, $M_n^* := \sup_{k\leq n}|M_k| \in \mathcal{L}^p$ für ein $1 < p < \infty$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}\big((M_n^*)^p\big) \leq c_p \cdot \mathbb{E}(|M_n|^p)}$

für ein geeignetes $c_p > 0$, z.B. $\frac{p}{p-1}$

Beweis

1. Schritt: $(M_n)_n$ Martingal oder *positives* Submartingal $\overset{\text{Prop.}}{\Rightarrow}$ $(|M_n|)_n$ Submartingal

Sei $n \in \mathbb{N}$ fix. und $h \geq 0$. $Y_n := M_n \cdot 1_{\left\{|M_n| \geq \frac{h}{2}\right\}} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}_n) \Rightarrow \left(X_k^{(n)}\right)_k := \mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_k)$ Martingal $\forall$ fix. n

2. Schritt: $M_n^* := \sup_{k\leq n}|M_k| \leq \sup_{k\leq n}|X_k^{(n)}| + \frac{h}{2}$

$\boldsymbol{\sup_{k\leq n}}$

denn: $k \leq n \Rightarrow |M_k| \overset{\text{Submartingaleigenschaft}}{\leq} |\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_k)| = \left|\mathbb{E}\left(Y_n + M_n \cdot 1_{\left\{|M_n| < \frac{h}{2}\right\}} \,\Big|\, \mathcal{F}_k\right)\right| \leq |X_k^{(n)}| + \frac{h}{2}$

3. Schritt: $\mathbb{P}(M_n^* \geq h) \leq \frac{2}{h}\mathbb{E}(|Y_n|)$

2. Doob'sche Martingal-Ungleichung

$(M_n)_n$ Martingal
oder *positives* Submartingal
$M_n^* := \sup_{k\le n}|M_k| \in \mathcal{L}^p$ für ein $1<p<\infty$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{E}\big((M_n^*)^p\big) \le c_p \cdot \mathbb{E}(|M_n|^p)}$$

für ein geeignetes $c_p > 0$, z.B. $\frac{p}{p-1}$

Beweis

1. Schritt: $(M_n)_n$ Martingal oder *positives* Submartingal $\overset{\textbf{Prop.}}{\Rightarrow}$ $(|M_n|)_n$ Submartingal

Sei $n \in \mathbb{N}$ fix.

$$Y_n := M_n \cdot 1_{\{|M_n|\ge\frac{h}{2}\}} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}_n) \Rightarrow \left(X_k^{(n)}\right)_k := \mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_k) \quad \text{Martingal } \forall \text{ fix. } n$$

2. Schritt: $M_n^* := \sup_{k\le n}|M_k| \le \sup_{k\le n}|X_k^{(n)}| + \frac{h}{2}$

1. Doob'sche Martingal-Ungleichung!
$\mathbb{P}\left(\sup_{k\le n}|\tilde{M}_k| \ge h\right) \le \frac{1}{h}\mathbb{E}(|\tilde{M}_n|)$

3. Schritt:

$$\mathbb{P}(M_n^* \ge h) \le \mathbb{P}\left(\sup_{k\le n}|X_k^{(n)}| \ge \frac{h}{2}\right) \le \frac{2}{h}\mathbb{E}\Big(\underbrace{|X_n^{(n)}|}_{=\mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_n) = Y_n}\Big) = \frac{2}{h}\mathbb{E}(|Y_n|)$$

4. Schritt:

$$\mathbb{E}\big((M_n^*)^p\big) = \int_0^\infty p\,\lambda^{p-1}\underbrace{\mathbb{P}(M_n^*\ge\lambda)}_{\le\frac{2}{\lambda}\mathbb{E}(|Y_n|)}\,d\lambda \le 2p\int_0^\infty \lambda^{p-2}\,\mathbb{E}\left(\left|M_n \cdot 1_{\{|M_n|\ge\frac{\lambda}{2}\}}\right|\right)d\lambda$$

Fubini

$$= 2p\,\mathbb{E}\Bigg(|M_n|\cdot\underbrace{\int_0^{\cancel{\infty}\;2|M_n|}\lambda^{p-2}\,\cancel{1}_{\{\lambda\le 2|M_n|\}}\,d\lambda}_{=\frac{1}{p-1}(2|M_n|)^{p-1}}\Bigg) \le \frac{p}{p-1}\,2^p\,\mathbb{E}\left(|M_n|^p\right)$$

1.3b Martingal-Ungleichungen (4)

$M_n^* := \sup_{k\le n}|M_k|$

1. Doob'sche Martingal-Ungleichung

$(M_n)_n$ Martingal
oder *positives* Submartingal

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{P}(M_n^*\ge h) \equiv \mathbb{P}\left(\sup_{k\le n}|M_k|\ge h\right) \overset{!}{\le} \frac{1}{h}\mathbb{E}(|M_n|) \quad \forall h \ge 0}$$

2. Doob'sche Martingal-Ungleichung

$(M_n)_n$ Martingal
oder *positives* Submartingal
$M_n^* := \sup_{k\le n}|M_k| \in \mathcal{L}^p$ für ein $1<p<\infty$

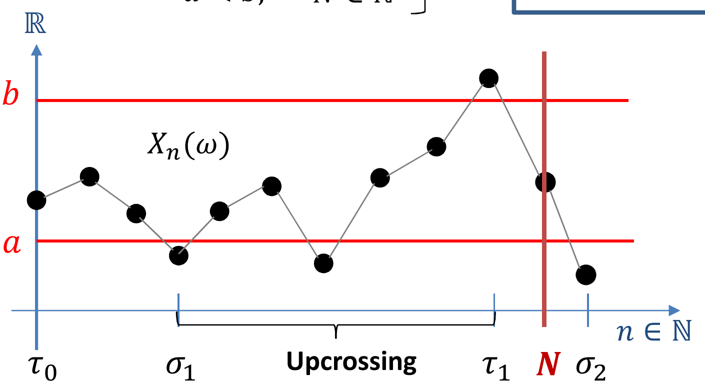
$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{E}\big((M_n^*)^p\big) \le c_p \cdot \mathbb{E}(|M_n|^p)}$$

für ein geeignetes $c_p > 0$, z.B. $\frac{p}{p-1}$

Doob'sches Upcrossing-Lemma

$(X_n)_n$ Submartingal
$a < b, \quad N \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{E}(U_N) \le \frac{1}{b-a}\cdot\mathbb{E}[(X_N-a)^+]}$$



$\boldsymbol{U_N := \max\{k \mid \tau_k \le N\}}$
$= \#$ **Upcrossings bis Zeit N**

$\tau_0 := 0$

$\sigma_1 := \min\{k > \tau_0 \mid X_k \le a\}$

$\tau_1 := \min\{k > \sigma_1 \mid X_k \ge b\}$

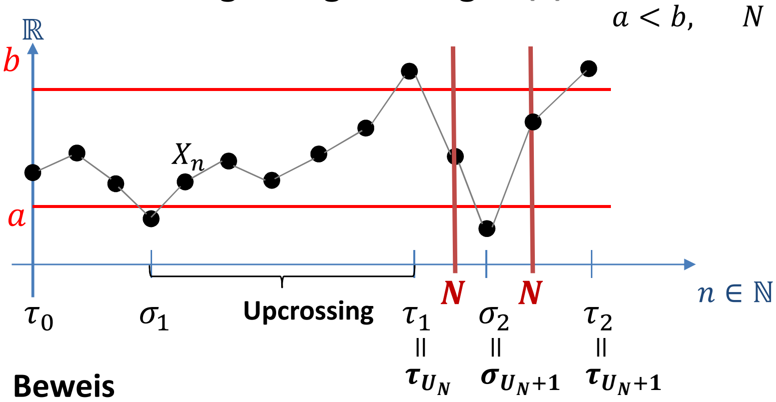
$\sigma_{j+1} := \min\{k > \tau_j \mid X_k \le a\}$

$\tau_{j+1} := \min\{k > \sigma_{j+1} \mid X_k \ge b\}$

1.3b Martingal-Ungleichungen (5)

$$\left.\begin{array}{l}(X_n)_n \text{ Submartingal}\\ a<b, \quad N\in\mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(U_N) \le \frac{1}{b-a}\cdot \mathbb{E}[(X_N-a)^+]}$$

$$\boldsymbol{U_N := \max\{k \mid \tau_k \le N\}}$$
$$= \textbf{\# Upcrossings bis Zeit } \boldsymbol{N}$$



$$\tau_0 := 0$$
$$\sigma_{j+1} := \min\{k>\tau_j \mid X_k \le a\}$$
$$\tau_{j+1} := \min\{k>\sigma_{j+1} \mid X_k \ge b\}$$

Beweis

1. Schritt:
$$\left.\begin{array}{c}(X_n)_n \text{ Submartingal}\\ \varphi(x) := (x-a)^+\\ \text{Konvex \& monoton wachsend}\end{array}\right\} \overset{\textbf{Prop.2}}{\Rightarrow} Y_n := (X_n-a)^+ \text{ definiert Submartingal}$$
$$\& \quad Y_{\tau_k} \ge b-a, \quad Y_{\sigma_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{\tau_k} - Y_{\sigma_k} \ge b-a$$

2. Schritt:

$\boxed{k \le U_N \Rightarrow \sigma_k \le \tau_k \le N}$ $\quad$ $\boxed{k > U_N \Rightarrow N < \tau_k}$

$$\underline{D := \sum_{k=1}^{N}(Y_{\tau_k\wedge N} - Y_{\sigma_k\wedge N})} = \sum_{k=1}^{U_N}\underbrace{(Y_{\tau_k\wedge N} - Y_{\sigma_k\wedge N})}_{=Y_{\tau_k}-Y_{\sigma_k}} + \underbrace{\sum_{k=U_N+1}^{N}(\underbrace{Y_{\tau_k\wedge N}}_{=Y_N\ge 0} - \underbrace{Y_{\sigma_k\wedge N}}_{\in\{0,Y_N\}})}_{\ge 0}$$
$$\ge \sum_{k=1}^{U_N}\underbrace{(Y_{\tau_k}-Y_{\sigma_k})}_{\ge b-a} \ge \underline{U_N\cdot(b-a)}$$

1.3b Martingal-Ungleichungen (6)

$$\left.\begin{array}{l}(X_n)_n \text{ Submartingal}\\ a<b, \quad N\in\mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(U_N) \le \frac{1}{b-a}\cdot \mathbb{E}[(X_N-a)^+]}$$

$$\boldsymbol{U_N := \max\{k \mid \tau_k \le N\}}$$
$$= \textbf{\# Upcrossings bis Zeit } \boldsymbol{N}$$

Beweis

1. Schritt: $Y_n := (X_n-a)^+$ definiert Submartingal

2. Schritt: $U_N\cdot(b-a) \le D := \sum_{k=1}^{N}(Y_{\tau_k\wedge N} - Y_{\sigma_k\wedge N})$

3. Schritt:
$$Y_N - Y_{\sigma_1\wedge N} \overset{\text{klar: } \sigma_{N+1}>N}{=} Y_{\sigma_{N+1}\wedge N} - Y_{\sigma_1\wedge N} \overset{\text{Teleskop}}{=} \sum_{k=1}^{N}(Y_{\sigma_{k+1}\wedge N} - Y_{\sigma_k\wedge N})$$
$$= \sum_{k=1}^{N}(Y_{\sigma_{k+1}\wedge N} - Y_{\tau_k\wedge N}) + \underbrace{\sum_{k=1}^{N}(Y_{\tau_k\wedge N} - Y_{\sigma_k\wedge N})}_{=D}$$

$$\Rightarrow D = Y_N \underbrace{- \cancel{Y_{\sigma_1\wedge N}}}_{\le 0} - \sum_{k=1}^{N}(Y_{\sigma_{k+1}\wedge N} - Y_{\tau_k\wedge N}) \le Y_N - \sum_{k=1}^{N}(Y_{\sigma_{k+1}\wedge N} - Y_{\tau_k\wedge N})$$

Def. von Y_n

4. Schritt:
$$\mathbb{E}(U_N) \overset{2.)}{\le} \frac{1}{b-a}\cdot\mathbb{E}(D) \overset{3.)}{\le} \frac{1}{b-a}\cdot\mathbb{E}(Y_N) - \frac{1}{b-a}\cdot\sum_{k=1}^{N}\underbrace{\mathbb{E}(Y_{\sigma_{k+1}\wedge N} - Y_{\tau_k\wedge N})}_{\ge 0} \le \frac{1}{b-a}\cdot\mathbb{E}(Y_N)$$

$(Y_n)_n$ **Submartingal**

$$\tilde{\tau} := \tau_k \wedge N \le \sigma_{k+1}\wedge N =: \tilde{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(Y_{\tilde{\sigma}}) \le \mathbb{E}(Y_{\tilde{\tau}})$$

1.3b Martingal-Ungleichungen (7)

1. Doob'sche Martingal-Ungleichung

$\boldsymbol{M_n^* := \sup_{k\le n} |M_k|}$

$(M_n)_n$ Martingal oder *positives* Submartingal $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{P}(M_n^* \ge h) \equiv \mathbb{P}\left(\sup_{k\le n} |M_k| \ge h\right) \overset{!}{\le} \frac{1}{h}\mathbb{E}(|M_n|) \quad \forall h \ge 0}$

2. Doob'sche Martingal-Ungleichung

$(M_n)_n$ Martingal oder *positives* Submartingal
$M_n^* := \sup_{k\le n}|M_k| \in \mathcal{L}^p$ für ein $1 < p < \infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}\big((M_n^*)^p\big) \le c_p \cdot \mathbb{E}(|M_n|^p)}$

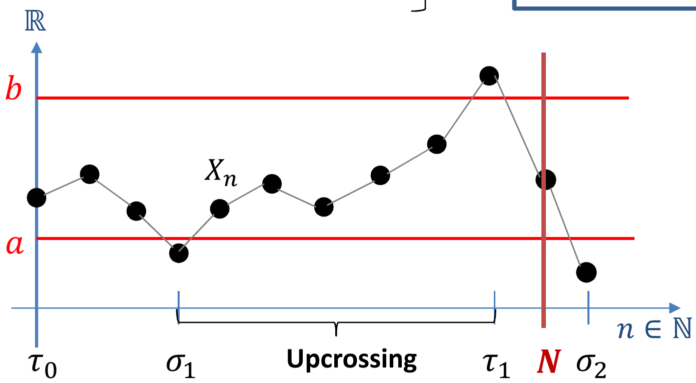
für ein geeignetes $c_p > 0$, z.B. $\frac{p}{p-1}$

Doob'sches Upcrossing-Lemma

$(X_n)_n$ Submartingal
$a < b, \quad N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(U_N) \le \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{E}[(X_N - a)^+] \le \frac{1}{b-a} \cdot (\mathbb{E}(X_N^+) + |a|)}$

$\boldsymbol{U_N := \max\{k \mid \tau_k \le N\}}$
= # Upcrossings bis Zeit N



$\tau_0 := 0$

$\sigma_{j+1} := \min\{k > \tau_j \mid X_k \le a\}$
$\tau_{j+1} := \min\{k > \sigma_{j+1} \mid X_k \ge b\}$

1.3c Martingal-Konvergenzsätze (1)

Satz

$(X_n)_n$ Submartingal mit $c := \sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty \;\Rightarrow\; \boxed{X_n \xrightarrow{n\to\infty} X_\infty \;\mathbb{P}\text{-f.s.},}$ für ein $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

Beweis

für Konvergenz nur z.z.: $\limsup_{n\to\infty} X_n \le \liminf_{n\to\infty} X_n$ $\mathbb{P}$-f.s., ("$\ge$" gilt immer!)

1. Schritt: $\Lambda := \{\limsup_{n\to\infty} X_n > \liminf_{n\to\infty} X_n\} = \bigcup_{\substack{a<b\\ a,b\in\mathbb{Q}}} \Lambda_{a,b}$ $\Rightarrow$ <u>z.z.:</u> $\mathbb{P}(\Lambda_{a,b}) = 0$ $\forall a < b;\; a,b \in \mathbb{Q}$

Pfade mit unendlich vielen Upcrossings!

für $a < b$ $\Lambda_{a,b} := \{\limsup_{n\to\infty} X_n \ge b \;\&\; \liminf_{n\to\infty} X_n \le a\} = \{\omega \in \Omega \mid U(a,b) = \infty\}$

$U(a,b) := \lim_{N\to\infty} \nearrow U_N(a,b)$ Anzahl der (a,b) - Upcrossings für den ***gesamten*** Pfad

aufsteigende Folge!

2. Schritt: Seien $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$ beliebig.

Beppo-Levi

$\mathbb{E}\big(U(a,b)\big) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(U_N) \le \frac{1}{b-a} \cdot (\underbrace{\limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}(X_N^+)}_{\le c < \infty} + |a|) \le \frac{1}{b-a} \cdot (c + |a|) < \infty$

Doob'sches Upcrossing-Lemma

$\boxed{\mathbb{E}(U_N) \le \frac{1}{b-a} \cdot (\mathbb{E}(X_N^+) + |a|)}$

$\Rightarrow U(a,b) < \infty$ $\mathbb{P}$–f.s.
$\Rightarrow \mathbb{P}(\Lambda_{a,b}) = 0$

1.3c Martingal-Konvergenzsätze (2)

Satz

$(X_n)_n$ Submartingal mit $c := \sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty \Rightarrow \boxed{X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X_\infty \ \mathbb{P}\text{-f.s.},}$ für ein $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

Beweis

1. Schritt
2. Schritt $\Bigg\} \Rightarrow X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., für eine ZV X_∞ d.h.: „für $\mathbb{P}$-f.a. Pfade existiert der Grenzwert“

3. Schritt noch z.z.: $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n \overset{!}{\in} \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

$$\mathbb{E}(|X_\infty|) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} |X_n|) = \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} |X_n|) \overset{\textit{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(\underbrace{|X_n|}_{\substack{= X_n^+ - X_n^- \\ \leq X_n^+ + X_n^- \\ = 2X_n^+ - X_n}}) \leq \liminf_{n\to\infty} (2\underbrace{\mathbb{E}(X_n^+)}_{\leq c} - \underbrace{\mathbb{E}(X_n)}_{\geq \mathbb{E}(X_0)})$$

Submartingal!

$$\leq 2c - \mathbb{E}(X_0)$$

$$< \infty$$