Wahrscheinlichkeitstheorie II

Vorlesung vom 29.04.

Christian Wiesel
V5-109

1. Martingale, Stoppzeiten und Filtrierungen

1.1 Stochastische Prozesse und σ-Algebren

1.2 Stoppzeiten

1.3 Martingale

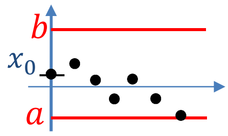
	Diskrete Zeit $\mathbb{N}$	Stetige Zeit $\mathbb{R}^+$
Def./Charakterisierung von Martingalen	*1.3a*	
Martingal-Ungleichungen	*1.3b*	$\Rightarrow$ *1.3d*
Martingal-Konvergenzsätze	***1.3c***	

Überblick

Diskrete Zeit $\mathbb{N}$

Martingale	*1.3a*	*Definition*	$\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \ \forall n \geq m$
		Charakterisierung	$\mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_0)\ \forall \tau$ beschr.
		Optional Stopping	$\mathbb{E}(M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = M_\sigma \ \forall \tau \geq \sigma$ beschr.
		Martingalzerlegung	$\underbrace{X_n}_{\text{Submartingal}} = X_0 + \underbrace{M_n}_{\text{Martingal}} + \underbrace{A_n}_{\text{wachsend}}$
Martingal-Ungleichungen	*1.3b*	*1. Martingal-Ungl.*	$\mathbb{P}(M_n^* \geq h) \leq \frac{1}{h}\mathbb{E}(\lvert M_n \rvert) \quad \forall h > 0$
		2. Martingal-Ungl.	$\mathbb{E}\big((M_n^*)^p\big) \leq c_p \cdot \mathbb{E}(\lvert M_n \rvert^p)$ $\quad 1 < p < \infty$
		Upcrossing-Lemma	$\mathbb{E}(U_N) \leq \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{E}[(X_N - a)^+]$
Martingal-Konvergenzsätze	*1.3c*	*Sub-MKS*	$\sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty \ \Rightarrow \ X_n \to X_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., für ein $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$
		MKS	

Ergänzung 1 1.3a Martingale in diskreter Zeit (7)



Beispiel: **Random Walk** ***„Flucht aus Intervall"***

Sei $x_0 \in \mathbb{Z}$. ein beliebiger Startpunkt, $(Z_n)_n$ eine $\{\pm 1\}$-wertige Folge, integrierbarer **uiv** ZV'en.

Wir verlangen nun $\mu := \mathbb{E}(Z_1) = 0$, d.h. $X_n := x_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k$ definiert ein $(\mathcal{F}_n^X)_n$-**Martingal**.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) \quad (*) \\ \text{für alle } \textbf{\textit{beschränkten}} \text{ Stoppzeiten } \tau\end{array}}$$

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < x_0 < b$ gegeben.

Frage: Mit welcher Wkt. trifft $X := (X_n)_n$ zuerst auf die rechte Grenze b? $p := \mathbb{P}\left(X_{\tau_{a,b}} = b\right)$?

Lösung: Definiere die Stoppzeit $\tau_{a,b} := \min\{n \mid X_n \in \{a, b\}\}$,

Es gilt: $\tau_{a,b}(\omega) < \infty$ $\mathbb{P}$-fs $\overset{\text{OBdA}}{\Rightarrow}$ $\Omega = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \underbrace{\{\tau_{a,b} \leq M\}}_{=:\, \Omega_M}$ d.h.: $\Omega_M \nearrow \Omega$

Beweis mit Kombinatorik: $\big(\underbrace{1 - 0.5^{(b-a)}}_{=:\, q}\big)^N \to 0, \quad N \to \infty$

Auf $\boldsymbol{\tau := \tau_{a,b} \wedge M}$ lässt sich nun $(*)$ anwenden!

$$x_0 = \mathbb{E}(X_0) \overset{(*)}{=} \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}\left(X_{\tau_{a,b}} \cdot 1_{\Omega_M}\right) + \mathbb{E}\left(X_M \cdot 1_{\Omega_M^c}\right)$$

$$= a \cdot \mathbb{P}(\{X_{\tau_{a,b}} = a\} \cap \Omega_M) + b \cdot \mathbb{P}(\{X_{\tau_{a,b}} = b\} \cap \Omega_M) + \mathbb{E}\left(X_M \cdot 1_{\Omega_M^c}\right)$$

$\Omega_M \nearrow \Omega$
& Maßstetigkeit

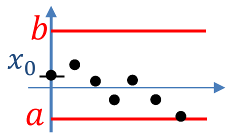
$$\overset{M \to \infty}{\to} a \cdot \mathbb{P}(\{X_{\tau_{a,b}} = a\}) + b \cdot \mathbb{P}(\{X_{\tau_{a,b}} = b\}) + 0$$

Dominierte Konvergenz

$$\boxed{\begin{array}{l} X_M \cdot 1_{\Omega_M^c} \to 0, \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \\ \left|X_M \cdot 1_{\Omega_M^c}\right| \leq \max\{|a|, |b|\} \in \mathcal{L}^1 \end{array}}$$

$$= a \cdot (1 - p) + b \cdot p \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{x_0 - a}{b - a}}$$

Ergänzung 2 1.3a Martingale in diskreter Zeit (7)



Beispiel: **Random Walk** ***„Flucht aus Intervall"***

Sei $x_0 \in \mathbb{Z}$. ein beliebiger Startpunkt, $(Z_n)_n$ eine $\{\pm 1\}$-wertige Folge, integrierbarer **uiv** ZV'en.

Wir verlangen nun $\mu := \mathbb{E}(Z_1) = 0$, d.h. $X_n := x_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k$ definiert ein $(\mathcal{F}_n^X)_n$-**Martingal**.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) \quad (*) \\ \text{für alle } \textbf{\textit{beschränkten}} \text{ Stoppzeiten } \tau\end{array}}$$

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < x_0 < b$ gegeben.

Frage: Mit welcher Wkt. trifft $X := (X_n)_n$ zuerst auf die rechte Grenze b? $p := \mathbb{P}\left(X_{\tau_{a,b}} = b\right)$?

Lösung: $\boxed{p = \frac{x_0 - a}{b - a}}$

Interpretation:

Zwei Spieler mit Startkapital $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$
In Schritt k ändert sich das Kapital von Spieler 1 um Z_k,
d.h. mit jeweils 50% Wkt gewinnt/verliert er eine Geldeinheit.
Das Spiel endet, wenn ein Spieler ein Kapital von $K_1 + K_2$ hat und der andere somit pleite ist.

Frage: Mit welcher Wkt. erreicht Spieler 1 das Kapital von $K_1 + K_2$ und beendet damit das Spiel?

Lösung: $\left.\begin{array}{l} a := 0, \quad b := K_1 + K_2, \\ x_0 := K_1, \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p = \frac{K_1}{K_1 + K_2}$

Ergänzung 3 1.3b Martingal-Ungleichungen (4)

1. Doob'sche Martingal-Ungleichung ← Variante für beliebige Submartingale

$(M_n)_n$ Martingal
oder *positives* Submartingal $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathbb{P}(M_n^* \geq h) \equiv \mathbb{P}\left(\sup_{k\leq n}|M_k| \geq h\right) \overset{!}{\leq} \frac{1}{h}\mathbb{E}(|M_n|) \quad \forall h > 0}$$

2. Doob'sche Martingal-Ungleichung ← = „Doob'sche Maximalungleichung"

$(M_n)_n$ Martingal
oder *positives* Submartingal
$M_n^* := \sup_{k\leq n}|M_k| \in \mathcal{L}^p$ für ein $1 < p < \infty$ $\Rightarrow$

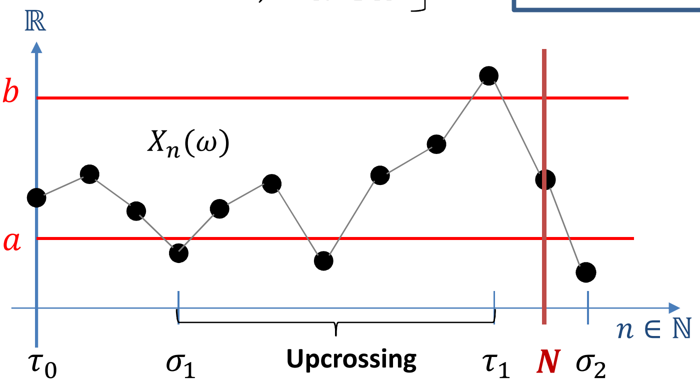
$$\boxed{\mathbb{E}\big((M_n^*)^p\big) \leq c_p \cdot \mathbb{E}(|M_n|^p)}$$

für ein geeignetes $c_p > 0$, z.B. $\frac{p}{p-1}$

Doob'sches Upcrossing-Lemma

$(X_n)_n$ Submartingal
$a < b, \quad N \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathbb{E}(U_N) \leq \frac{1}{b-a}\cdot\mathbb{E}[(X_N - a)^+]}$$



$\boldsymbol{U_N := \max\{k \mid \tau_k \leq N\}}$
$= \#$ **Upcrossings bis Zeit N**

$\tau_0 := 0$

$\sigma_1 := \min\{k > \tau_0 \mid X_k \leq a\}$

$\tau_1 := \min\{k > \sigma_1 \mid X_k \geq b\}$

$\sigma_{j+1} := \min\{k > \tau_j \mid X_k \leq a\}$
$\tau_{j+1} := \min\{k > \sigma_{j+1} \mid X_k \geq b\}$

Ergänzung 4 1.3b Martingal-Ungleichungen

1. Doob'sche Martingal-Ungleichung

$M_n^* := \sup_{k\leq n}|M_k|$

$(M_n)_n$ Martingal
oder *positives* Submartingal

$$\boxed{\mathbb{P}(M_n^* \geq h) \equiv \mathbb{P}\left(\sup_{k\leq n}|M_k| \geq h\right) \overset{!}{\leq} \frac{1}{h}\mathbb{E}(|M_n|) \quad \forall h > 0}$$

Variante für beliebige Submartingale

Doob'sche Submartingal-Ungleichung

$(X_n)_n$ Submartingal $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathbb{P}(\sup_{k\leq n} X_k \geq +h) \leq \frac{1}{h}\mathbb{E}(X_n^+) \quad \forall h > 0}$$

Beweis:

$(X_n)_n$ Submartingal
$\varphi(x) := x^+$ *konvex*, mon. wachsend $\Rightarrow$ $\underline{(M_n)_n := (X_n^+)_n \text{ positives Submartingal}}$

$$\underline{\mathbb{P}(\sup_{k\leq n} X_k \geq h)} \overset{h>0}{=} \mathbb{P}(\sup_{k\leq n} X_k^+ \geq h) = \mathbb{P}(\sup_{k\leq n}|X_k^+| \geq h) \leq \frac{1}{h}\mathbb{E}(|X_n^+|) = \underline{\frac{1}{h}\mathbb{E}(X_n^+)}$$

1.3b Martingal-Ungleichungen - Zusammenfassung

Doob'sche Submartingal-Ungleichung

$(X_n)_n$ Submartingal $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{P}(\sup_{k\le n} X_k \ge +h) \le \frac{1}{h}\mathbb{E}(X_n^+) \quad \forall h > 0}$

Doob'sche Maximal-Ungleichung

$(M_n)_n$ Martingal
oder *positives* Submartingal
$M_n^* := \sup_{k\le n}|M_k| \in \mathcal{L}^p$ für ein $1 < p < \infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}\big((M_n^*)^p\big) \le c_p \cdot \mathbb{E}(|M_n|^p)}$

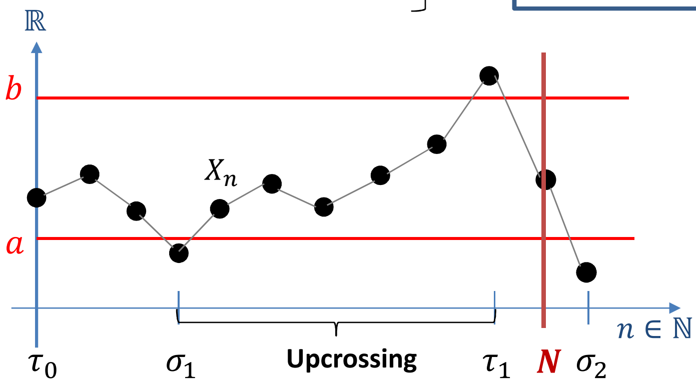
für ein geeignetes $c_p > 0$

Doob'sches Upcrossing-Lemma

$(X_n)_n$ Submartingal
$a < b, \quad N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(U_N) \le \frac{1}{b-a}\cdot\mathbb{E}[(X_N-a)^+] \le \frac{1}{b-a}\cdot(\mathbb{E}(X_N^+)+|a|)}$

$\boldsymbol{U_N := \max\{k \mid \tau_k \le N\}}$
$= \#$ **Upcrossings bis Zeit** $\boldsymbol{N}$



$\tau_0 := 0$

$\sigma_{j+1} := \min\{k > \tau_j \mid X_k \le a\}$
$\tau_{j+1} := \min\{k > \sigma_{j+1} \mid X_k \ge b\}$

1.3c Martingal-Konvergenzsätze (1)

Submartingal-Konvergenzsatz

$(X_n)_n$ Submartingal mit $c := \sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty \Rightarrow$ $\boxed{X_n \xrightarrow{n\to\infty} X_\infty \ \mathbb{P}\text{-f.s.,}}$ für ein $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

Beweis

für $\mathbb{P}$-f.s. Konvergenz nur z.z.: $\liminf_{n\to\infty} X_n \ge \limsup_{n\to\infty} X_n$ $\mathbb{P}$-f.s., (" $\le$ " gilt immer!)

1. Schritt: $\Lambda := \{\liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n\} = \bigcup_{\substack{a<b\\ a,b\in\mathbb{Q}}} \Lambda_{a,b}$ $\Rightarrow$ z.z.: $\mathbb{P}(\Lambda_{a,b}) = 0 \quad \forall a < b;\ a,b \in \mathbb{Q}$

Pfade mit unendlich vielen Upcrossings!

für $a < b$ $\quad \Lambda_{a,b} := \{\liminf_{n\to\infty} X_n \le a < b \le \limsup_{n\to\infty} X_n\} = \{\omega \in \Omega \mid U(a,b) = \infty\}$

$U(a,b) := \lim_{N\to\infty} \nearrow U_N(a,b)$ Anzahl der (a,b) - Upcrossings für den ***gesamten*** Pfad

aufsteigende Folge!

2. Schritt: Seien $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$ beliebig.

$$\mathbb{E}\big(U(a,b)\big) \overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \lim_{N\to\infty}\mathbb{E}(U_N) \le \frac{1}{b-a}\cdot(\underbrace{\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}(X_N^+)}_{\le c<\infty} + |a|) \le \frac{1}{b-a}\cdot(c+|a|) < \infty$$

Doob'sches Upcrossing-Lemma

$\boxed{\mathbb{E}(U_N) \le \frac{1}{b-a}\cdot(\mathbb{E}(X_N^+)+|a|)}$

$\Rightarrow U(a,b) < \infty$ $\mathbb{P}$–f.s.

$\Rightarrow \mathbb{P}(\Lambda_{a,b}) = 0$

1.3c Martingal-Konvergenzsätze (2)

Submartingal-Konvergenzsatz

$(X_n)_n$ Submartingal mit $c := \sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty \;\Rightarrow\; \boxed{X_n \xrightarrow{n\to\infty} X_\infty \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.,}}$ für ein $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

Beweis

1. Schritt
2. Schritt
$\Rightarrow \; X_n \xrightarrow{n\to\infty} X_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., für eine ZV X_∞ d.h.: „für $\mathbb{P}$-f.a. Pfade existiert der Grenzwert"

3. Schritt noch z.z.: $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n \overset{!}{\in} \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

$$\mathbb{E}(|X_\infty|) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty}|X_n|) = \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty}|X_n|) \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(\underbrace{|X_n|}_{\substack{= X_n^+ + X_n^- \\ = 2X_n^+ - X_n}}) = \liminf_{n\to\infty} (2\underbrace{\mathbb{E}(X_n^+)}_{\leq c} - \underbrace{\mathbb{E}(X_n)}_{\geq \mathbb{E}(X_0)})$$

$X_n = X_n^+ - X_n^-$

Submartingal!

$$\leq 2c - \mathbb{E}(X_0)$$

$$< \infty$$

1.3c Martingal-Konvergenzsätze (3)

Submartingal-Konvergenzsatz

$(X_n)_n$ Submartingal mit $c := \sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty \;\Rightarrow\; \boxed{X_n \xrightarrow{n\to\infty} X_\infty \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.,}}$ für ein $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

Definition z.B.: $\mathcal{H} := \{X_n | n \in \mathbb{N}\}$

Eine Menge von ZV'en $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

heißt *gleichgradig integrierbar* $:\Leftrightarrow \; \sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}(|X| \cdot 1_{\{|X|\geq L\}}) \xrightarrow[L\to\infty]{} 0$

Proposition

$a)$ $\sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ für ein $1 < p < \infty \;\Rightarrow\; \mathcal{H}$ gleichgradig integrierbar

$b)$ $|X| \leq Y \;\; \forall X \in \mathcal{H}$ für ein festes $Y \geq 0, Y \in \mathcal{L}^1$ $\;\Rightarrow\; \mathcal{H}$ gleichgradig integrierbar

Beweis

uniform in $X \in \mathcal{H}$!

$$a) \; X \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{E}(|X| 1_{\{|X|\geq L\}}) \leq \mathbb{E}(|X| \cdot \frac{|X|^{p-1}}{L^{p-1}} \cdot \cancel{1_{\{|X|\geq L\}}}) \leq \frac{1}{L^{p-1}} \underbrace{\mathbb{E}(|X|^p)}_{\leq c := \sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}(|X|^p)} \xrightarrow[L\to\infty]{} 0 \quad \forall p > 1$$

$$b) \; X \in \mathcal{H} \Rightarrow |X| \leq Y \Rightarrow |X| \cdot 1_{\{|X|\geq L\}} \leq Y \cdot 1_{\{|X|\geq L\}} \leq Y \cdot 1_{\{|Y|\geq L\}} \xrightarrow[L\to\infty]{Y\in\mathcal{L}^1} 0 \;\; \mathbb{P}\text{-fs.}$$

$$\Rightarrow \sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}(|X| \cdot 1_{\{|X|\geq L\}}) \leq \mathbb{E}(\underbrace{Y \cdot 1_{\{|Y|\geq L\}}}_{\leq Y \in \mathcal{L}^1}) \xrightarrow[L\to\infty]{} 0$$

Majorisierte Konvergenz

1.3c Martingal-Konvergenzsätze (4)

Submartingal-Konvergenzsatz

$(X_n)_n$ Submartingal mit $c := \sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty \;\Rightarrow\; \boxed{X_n \xrightarrow{n\to\infty} X_\infty \ \mathbb{P}\text{-f.s.,}}$ für ein $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

Definition z.B.: $\mathcal{H} := \{X_n | n \in \mathbb{N}\}$

Eine Menge von ZV'en $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

heißt *gleichgradig integrierbar* $:\Leftrightarrow \quad \sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}(|X|\cdot 1_{\{|X|\geq L\}}) \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Proposition

$a)$ $\sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ für ein $1 < p < \infty \;\Rightarrow\; \mathcal{H}$ gleichgradig integrierbar

$b)$ $\left.\begin{array}{c} |X| \leq Y \quad \forall X \in \mathcal{H} \\ \text{für ein festes } Y \geq 0, Y \in \mathcal{L}^1 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \mathcal{H}$ gleichgradig integrierbar

Martingal-Konvergenzsatz

$a)$ $\left.\begin{array}{c} (M_n)_n \text{ Martingal,} \\ \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ gleichgradig integrierbar} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} i) & M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_\infty \ \mathbb{P}\text{-f.s., für ein } M_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}) \\ ii) & \mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) \to 0, \ \mathcal{L}^1\text{-Konvergenz!} \\ iii) & M_n = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n), \forall n \quad (\mathbb{P}\text{-f.s}) \end{array}\right.$

$b)$ $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}), \quad M_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \quad \Rightarrow \quad \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar

1.3c Martingal-Konvergenzsätze (5)

Submartingal-Konvergenzsatz

$(X_n)_n$ Submartingal mit $c := \sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty \;\Rightarrow\; \boxed{X_n \xrightarrow{n\to\infty} X_\infty \ \mathbb{P}\text{-f.s.,}}$ für ein $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

Definition $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ *gleichgradig integrierbar* $:\Leftrightarrow \quad \sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}(|X|\cdot 1_{\{|X|\geq L\}}) \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Martingal-Konvergenzsatz

$a)$ $\left.\begin{array}{c} (M_n)_n \text{ Martingal,} \\ \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ gleichgradig integrierbar} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} i) & M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_\infty \ \mathbb{P}\text{-f.s., für ein } M_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}) \\ ii) & \mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \ \mathcal{L}^1\text{-Konvergenz!} \\ iii) & M_n = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n), \forall n \quad (\mathbb{P}\text{-f.s}) \end{array}\right.$

$b)$ $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}), \quad M_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \quad \Rightarrow \quad \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar

Beweis

$a)$

i) Nur zz., dass $c := \sup_n \mathbb{E}(M_n^+) < \infty$. Dann folgt die Behauptung aus vorherigem Satz!

$\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgr. intbar $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists L$ s.d.: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big(|M_n|\cdot 1_{\{|M_n|\geq L\}}\big) < \varepsilon$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(M_n^+) \leq \mathbb{E}(|M_n|) = \underbrace{\mathbb{E}\big(|M_n|\cdot 1_{\{|M_n|\geq L\}}\big)}_{<\varepsilon} + \mathbb{E}\big(\underbrace{|M_n|\cdot}_{<L} \cancel{1_{\{|M_n|<L\}}}\big) < \varepsilon + L$$

unabhängig von $n \in \mathbb{N}$!

$\Rightarrow i)$

Martingal-Konvergenzsatz (6)

$a)$ $\left.\begin{array}{r}(M_n)_n \text{ Martingal,}\\ \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ gleichgradig integrierbar}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} i)\quad M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_\infty \;\; \mathbb{P}\text{-f.s., für ein } M_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}) \\ ii)\quad \mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \;\; \mathcal{L}^1\text{-Konvergenz!} \\ iii)\quad M_n = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n), \forall n \quad (\mathbb{P}\text{-f.s}) \end{array}\right.$

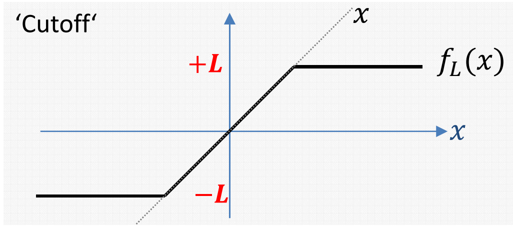
$b)$ $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}), \quad M_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \quad \Rightarrow \quad \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar

Beweis

$a)$ $\boldsymbol{ii)}$ Für $L > 0$ sei
$$f_L(x) := \begin{cases} L, & x > L \\ x, & -L \le x \le L \\ -L, & x < -L \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f_L stetig und beschränkt!

‘Cutoff‘



$$\mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) = \mathbb{E}(|M_n - f_L(M_n) + f_L(M_n) - f_L(M_\infty) + f_L(M_\infty) - M_\infty|)$$
$$\le \underbrace{\mathbb{E}(|M_n - f_L(M_n)|)}_{\alpha_n} + \underbrace{\mathbb{E}(|f_L(M_n) - f_L(M_\infty)|)}_{\beta_n} + \underbrace{\mathbb{E}(|f_L(M_\infty) - M_\infty|)}_{\gamma_n}$$

$$\alpha_n: \quad \mathbb{E}(|M_n - f_L(M_n)|) = \mathbb{E}(\underbrace{|M_n - (-L)|}_{\le |M_n| + L \;\le 2|M_n|} \cdot 1_{\{M_n < -L\}}) + 0 + \mathbb{E}(\underbrace{|M_n - L|}_{\le |M_n| + L \;\le 2|M_n|} \cdot 1_{\{M_n > +L\}})$$

$\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgr. intbar: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|M_n| \cdot 1_{\{|M_n| \ge L\}}) \xrightarrow[L\to\infty]{} 0$

$$\le 2\,\mathbb{E}(|M_n| \cdot 1_{\{|M_n| > L\}}) \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } L \ge L_\varepsilon$$ uniform in $n \in \mathbb{N}$

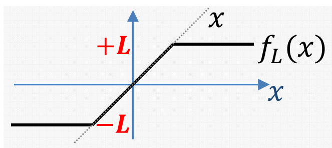
Martingal-Konvergenzsatz (7)

$a)$ $\left.\begin{array}{r}(M_n)_n \text{ Martingal,}\\ \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ gleichgradig integrierbar}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} i)\quad M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_\infty \;\; \mathbb{P}\text{-f.s., für ein } M_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}) \\ ii)\quad \mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \;\; \mathcal{L}^1\text{-Konvergenz!} \\ iii)\quad M_n = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n), \forall n \quad (\mathbb{P}\text{-f.s}) \end{array}\right.$

$b)$ $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}), \quad M_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \quad \Rightarrow \quad \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar

Beweis

$a)$ $\boldsymbol{ii)}$ Für $L > 0$ sei
$f_L(x) := x \cdot 1_{\{|x| \le L\}} + L \cdot 1_{\{|x| > L\}} \;\Rightarrow\; f_L$ stetig und beschränkt!



$$\mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) = \mathbb{E}(|M_n - f_L(M_n) + f_L(M_n) - f_L(M_\infty) + f_L(M_\infty) - M_\infty|)$$
$$\le \underbrace{\mathbb{E}(|M_n - f_L(M_n)|)}_{\alpha_n} + \underbrace{\mathbb{E}(|f_L(M_n) - f_L(M_\infty)|)}_{\beta_n} + \underbrace{\mathbb{E}(|f_L(M_\infty) - M_\infty|)}_{\gamma_n}$$

Sei $\varepsilon > 0$. **Gesucht:** $L_\varepsilon > 0,\; N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.d.: $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n < \varepsilon \quad \forall n \ge N_\varepsilon$

α_n: $\mathbb{E}(|M_n - f_L(M_n)|) \le \dfrac{\varepsilon}{3}$ für $L \ge L'_\varepsilon$ uniform in $n \in \mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgr. intbar: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|M_n| \cdot 1_{\{|M_n| \ge L\}}) \xrightarrow[L\to\infty]{} 0$

analog

γ_n: $\mathbb{E}(|f_L(M_\infty) - M_\infty|) \le 2\,\mathbb{E}(|M_\infty| \cdot 1_{\{|\infty| > L\}}) \le \dfrac{\varepsilon}{3}$ für $L \ge L''_\varepsilon$ $\Leftarrow$ $\boxed{M_\infty \text{ integrierbar}}$

$\Rightarrow$ für $L_\varepsilon := \max\{L'_\varepsilon, L''_\varepsilon\}$ gilt $\alpha_n + \gamma_n \le \dfrac{2\varepsilon}{3}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Martingal-Konvergenzsatz (8)

$a)$ $(M_n)_n$ Martingal, $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar $\Rightarrow$

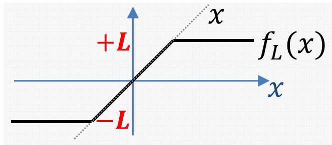
- $i)$ $M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., für ein $M_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$
- $ii)$ $\mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\mathcal{L}^1$-Konvergenz!
- $iii)$ $M_n = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n), \forall n$ ($\mathbb{P}$-f.s)

$b)$ $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}), \quad M_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \quad \Rightarrow \quad \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar

Beweis

$a)$ $\boldsymbol{ii)}$ Für $L > 0$ sei

$f_L(x) := x \cdot 1_{\{|x|\le L\}} + L \cdot 1_{\{|x|>L\}} \Rightarrow f_L$ stetig und beschränkt!



$$\mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) = \mathbb{E}(|M_n - f_L(M_n) + f_L(M_n) - f_L(M_\infty) + f_L(M_\infty) - M_\infty|)$$

$$\le \underbrace{\mathbb{E}(|M_n - f_L(M_n)|)}_{\alpha_n} + \underbrace{\mathbb{E}(|f_L(M_n) - f_L(M_\infty)|)}_{\beta_n} + \underbrace{\mathbb{E}(|f_L(M_\infty) - M_\infty|)}_{\gamma_n}$$

Sei $\varepsilon > 0$. **Gesucht:** $L_\varepsilon > 0$, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.d.: $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n < \varepsilon \quad \forall n \ge N_\varepsilon$

α_n, γ_n:

für $L_\varepsilon := \max\{L'_\varepsilon, L''_\varepsilon\}$ gilt $\alpha_n + \gamma_n \le \dfrac{2\varepsilon}{3} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

β_n:

$i) \Rightarrow M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., $\Rightarrow$ $f_L(M_n) \xrightarrow[f_L \text{ stetig}]{n\to\infty} f_L(M_\infty)$ $\mathbb{P}$-f.s., $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(f_L(M_n)) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}(f_L(M_\infty))$

$|f_L(M_n)| \le L \in \mathcal{L}^1$ Majorisierte Konvergenz

$\Rightarrow \mathbb{E}(|f_L(M_n) - f_L(M_\infty)|) \le \dfrac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, n \ge N_\varepsilon$

$\Rightarrow ii)$

Martingal-Konvergenzsatz (9)

$a)$ $(M_n)_n$ Martingal, $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar $\Rightarrow$

- $i)$ $M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., für ein $M_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$
- $ii)$ $\mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\mathcal{L}^1$-Konvergenz!
- $iii)$ $M_n = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n), \forall n$ ($\mathbb{P}$-f.s)

$b)$ $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}), \quad M_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \quad \Rightarrow \quad \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar

Beweis

$a)$ $\boldsymbol{iii)}$ Fasse M_n auf als Kandidat für die bedingte Wkt. $\mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n)$.

Da M_n $\mathcal{F}_n$-mb. ist, bleibt nur z.z., dass $\mathbb{E}(M_n \cdot 1_A) = \mathbb{E}(M_\infty \cdot 1_A) \ \ \forall A \in \mathcal{F}_n$.

Sei $A \in \mathcal{F}_n$. Dann gilt **für alle $N \ge n$**:

$$|\mathbb{E}(M_n \cdot 1_A) - \mathbb{E}(M_\infty \cdot 1_A)| \le \underbrace{|\mathbb{E}(M_n \cdot 1_A) - \mathbb{E}(M_N \cdot 1_A)|}_{=0} + \underbrace{|\mathbb{E}(M_N \cdot 1_A) - \mathbb{E}(M_\infty \cdot 1_A)|}_{\le \mathbb{E}(|M_N - M_\infty| \cdot \cancel{1_A})}$$

$(M_n)_n$ Martingal

$M_n = \mathbb{E}(M_N \mid \mathcal{F}_n)$

$\le \mathbb{E}(|M_N - M_\infty|) \xrightarrow{ii)} 0$, $N \to \infty$

LS unabhängig von N

$\Rightarrow |\mathbb{E}(M_n \cdot 1_A) - \mathbb{E}(M_\infty \cdot 1_A)| = 0 \quad \forall\, A \in \mathcal{F}_n. \ \Rightarrow iii)$

$\boldsymbol{b)}$ **z.z.:** $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgr. intbar, d.h.: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|M_n| \cdot 1_{\{|M_n|\ge L\}}) \xrightarrow[L\to\infty]{} 0$

$\mathcal{F}_n$-mb.!

$$n \in \mathbb{N}, L > 0 \Rightarrow \mathbb{E}\big(|M_n| \cdot 1_{\{|M_n|\ge L\}}\big) = \mathbb{E}\big(\underbrace{|\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)|}_{\le \mathbb{E}(|Y| \mid \mathcal{F}_n)} \cdot 1_{\{|M_n|\ge L\}}\big) \le \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(|Y| \mid \mathcal{F}_n) \cdot 1_{\{|M_n|\ge L\}}\big)$$

$$= \mathbb{E}(|Y| \cdot 1_{\{|M_n|\ge L\}})$$

Martingal-Konvergenzsatz (10)

a) $(M_n)_n$ Martingal, $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar $\Rightarrow$
- $i)$ $M_n \xrightarrow{n \to \infty} M_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., für ein $M_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$
- $ii)$ $\mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $\mathcal{L}^1$-Konvergenz!
- $iii)$ $M_n = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n), \forall n$ ($\mathbb{P}$-f.s)

b) $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$, $M_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)$ $\Rightarrow$ $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar

Beweis $b)$ **z.z.:** $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgr. intbar, d.h.: $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|M_n| \cdot 1_{\{|M_n| \geq L\}}) \xrightarrow[L \to \infty]{} 0$

Ziel: finde zu $\varepsilon > 0$ ein L_ε, s.d.: $\sup_n \mathbb{E}(|M_n| \cdot 1_{\{|M_n| \geq L\}}) < \varepsilon \quad \forall L \geq L_\varepsilon$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, L > 0$

$$\mathbb{E}(|M_n| \cdot 1_{\{|M_n| \geq L\}}) \leq \mathbb{E}(\underbrace{|\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)|}_{\leq \mathbb{E}(|Y| \mid \mathcal{F}_n)} \cdot 1_{\{|M_n| \geq L\}}) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|Y| \mid \mathcal{F}_n) \cdot 1_{\{|M_n| \geq L\}}) = \mathbb{E}(|Y| \cdot 1_{\{|M_n| \geq L\}})$$

$\forall\, K > 0$

$$= \mathbb{E}(|Y| \cdot \cancel{1_{\{|M_n| \geq L\}}} \cdot 1_{\{|Y| \geq K\}}) + \mathbb{E}(\underbrace{|Y|}_{< K} \cdot 1_{\{|M_n| \geq L\}} \cdot \cancel{1_{\{|Y| < K\}}})$$

$$\leq \mathbb{E}(|Y| \cdot 1_{\{|Y| \geq K\}}) + K \cdot \underbrace{\mathbb{E}(1_{\{|M_n| \geq L\}})}_{= \mathbb{P}(|M_n| \geq L) \leq \frac{1}{L} \cdot \mathbb{E}(|M_n|) \leq \frac{1}{L} \cdot \mathbb{E}(|Y|)}$$

Markov – Ungleichung

$|M_n| = |\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}(|Y| \mid \mathcal{F}_n)$

$$\leq \underbrace{\mathbb{E}(|Y| \cdot 1_{\{|Y| \geq K\}})}_{< \frac{\varepsilon}{2} \quad K = K_\varepsilon} + \underbrace{\frac{K}{L} \cdot \mathbb{E}(|Y|)}_{< \frac{\varepsilon}{2} \quad L \geq L_\varepsilon}$$

*obere Schranke **uniform** **für alle n***

$\Rightarrow iii)$

1.3c Martingal-Konvergenzsätze (11)

Martingal-Konvergenzsatz

a) $(M_n)_n$ Martingal, $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar $\Rightarrow$
- $i)$ $M_n \xrightarrow{n \to \infty} M_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., für ein $M_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$
- $ii)$ $\mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $\mathcal{L}^1$-Konvergenz!
- $iii)$ $M_n = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n), \forall n$ ($\mathbb{P}$-f.s)

b) $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$, $M_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)$ $\Rightarrow$ $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar

Definition Analog zum zeitstetigen Fall sei $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$.

Korollar zum MKS

Für alle $Y \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ gilt: $M_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_\infty)$ $\mathbb{P}$-f.s.

und falls Y sogar $\mathcal{F}_\infty$-messbar, folgt: $M_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow{n \to \infty} Y$ $\mathbb{P}$-f.s.

Beweis

$M_n := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \overset{\text{MKS } b)}{\Rightarrow} \{M_n\}_n$ gleichgr. intbar $\overset{\text{MKS } a), i)}{\Rightarrow} M_n \xrightarrow{n \to \infty} M_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., für ein $M_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$

z.z. ist nur, dass $M_\infty = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_\infty)$

Jedes M_n ist $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_\infty$ messbar. $\Rightarrow$ M_∞ ist als $\mathbb{P}$-f.s. Limes von $\mathcal{F}_\infty$-mb. Fkten auch $\mathcal{F}_\infty$-messbar!

Nach MKS $a), iii)$ gilt für M_∞: $\underline{\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)} =: M_n = \underline{\mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n)}$ $\mathbb{P}$–f.s, $\forall n$

Def. bed. Erwartung

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(Y \cdot 1_A) = \mathbb{E}(M_\infty \cdot 1_A)$ $\forall A \in \mathcal{F}_n \ \forall n$ $\longleftrightarrow$ d.h. $\forall A \in \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n}_{\cap\text{-stabiler Erzeuger von } \mathcal{F}_\infty}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(Y \cdot 1_A) = \mathbb{E}(M_\infty \cdot 1_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_\infty$

Überblick

Diskrete Zeit $\mathbb{N}$

Martingale	***1.3a***	***Definition***	$\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \;\; \forall n \geq m$
		Charakterisierung	$\mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_0)$ $\forall \tau$ beschr.
		Optional Stopping	$\mathbb{E}(M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = M_\sigma \;\; \forall \tau \geq \sigma$ beschr.
		Martingalzerlegung	$X_n = X_0 + M_n + A_n$ Submartingal, Martingal, wachsend
Martingal-Ungleichungen	***1.3b***	***1. Martingal-Ungl.***	$\mathbb{P}(M_n^* \geq h) \leq \frac{1}{h}\mathbb{E}(\lvert M_n \rvert) \quad \forall h > 0$
		2. Martingal-Ungl.	$\mathbb{E}\big((M_n^*)^p\big) \leq c_p \cdot \mathbb{E}(\lvert M_n \rvert^p)$ $1 < p < \infty$
		Upcrossing-Lemma	$\mathbb{E}(U_N) \leq \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{E}[(X_N - a)^+]$
Martingal-Konvergenzsätze	***1.3c***	***Sub-MKS***	$\sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty \;\Rightarrow\; X_n \to X_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., für ein $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$
		MKS	$(M_n)_n$ glgr. intbar $\Rightarrow \begin{cases} M_n \to M_\infty \; \mathbb{P}\text{-f.s. \& in } \mathcal{L}^1 \\ M_n = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n), \forall n \end{cases}$
			$M_n \coloneqq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \;\Rightarrow\; (M_n)_n$ glgr. intbar

Überblick

	Diskrete Zeit $\mathbb{N}$	Stetige Zeit $\mathbb{R}^+$
Martingale	***1.3a*** ✔	
Martingal-Ungleichungen	***1.3b*** ✔ $\Rightarrow$	***1.3d***
Martingal-Konvergenzsätze	***1.3c*** ✔	

$X_1\colon (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathbb{P}X_1^{-1})$		**Diskrete Zeit** $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$	**Stetige Zeit** $\mathbb{R}^+$
Filtrierung		$(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$	$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \forall\, 0 \leq s < t$
stochastischer Prozess X ***Annahmen an*** $\boldsymbol{X}$		$X \equiv (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **-adaptiert** $\mathbb{E}(\lvert X_n\rvert) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$	$X \equiv (X_t)_{t\geq 0}$ $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ **-adaptiert** $\mathbb{E}(\lvert X_t\rvert) < \infty\ \forall t \geq 0$
X ***Submartingal*** X ***Martingal***	$:\Leftrightarrow$ $:\Leftrightarrow$	$\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq X_m \ \ \forall n \geq m$ $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \ \ \forall n \geq m$	$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s \ \ \forall t \geq s$ $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \ \ \forall t \geq s$
X ***Martingal*** $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***konvex***, mb.	*Jensen'sche* $\Rightarrow$ *Ungleichung*	$\big(\varphi(X_n)\big)_n$ Submartingal, falls $\mathbb{E}(\lvert\varphi(X_n)\rvert) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\big(\varphi(X_t)\big)_t$ Submartingal, falls $\mathbb{E}(\lvert\varphi(X_t)\rvert) < \infty \ \ \forall t \geq 0$
			$\boldsymbol{(X_t)_t}$ **nun mit rechtsstetigen Pfaden**
<u>**Doob'sche Submartingal-Ungleichung**</u> *X Submartingal*	$\Rightarrow$ $\forall\lambda > 0$	$\boxed{\mathbb{P}(\sup_{k\leq n} X_k \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_n^+)}$	$\boxed{\mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t} X_s \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_t^+)}$
<u>**Doob'sche Maximal-Ungleichung**</u> *X Martingal oder pos. Submartingal*	$\Rightarrow$ $1 < p < \infty$	$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{k\leq n}\lvert X_k\rvert\right)^p\right) \leq c_p \cdot \mathbb{E}(\lvert X_n\rvert^p)$ falls $\sup_{k\leq n}\lvert X_k\rvert \in \mathcal{L}^p$	$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\leq s\leq t}\lvert X_s\rvert\right)^p\right) \leq c_p \cdot \mathbb{E}(\lvert X_t\rvert^p)$ falls $\sup_{0\leq s\leq t}\lvert X_s\rvert \in \mathcal{L}^p$
<u>**Doob'sches Upcrossing-Lemma**</u> *X Submartingal*	$\Rightarrow$ $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$	$\mathbb{E}(U_N) \leq \frac{1}{b-a}\cdot\mathbb{E}[(X_N - a)^+]$ $N \in \mathbb{N} \quad U_N = \#$ Upcrossings bis Zeit N	$\mathbb{E}(U_t) \leq \frac{1}{b-a}\cdot\mathbb{E}[(X_t - a)^+]$ $t \geq 0 \quad U_t = \#$ Upcrossings bis Zeit t

<u>**Doob'sche Submartingal-Ungleichung**</u> **Äquivalente Formulierung**

Sei $(X_n)_n$ ein Submartingal. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\sup_{k\leq N} X_k}_{=:Z} \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\underbrace{\mathbb{E}(X_N^+)}_{=:c} \quad \forall\lambda > 0$$

bzw. **äquivalent** dazu:

$$\mathbb{P}(\sup_{k\leq N} X_k > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_N^+) \quad \forall\lambda > 0$$

Beobachtung

Sei Z eine reellwertige ZV und $c \geq 0$.

Dann sind folgende Aussagen **äquivalent**:

$$\left\{\begin{array}{l} i)\ \ \mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\cdot c \quad \forall\lambda > 0 \\ ii)\ \ \mathbb{P}(Z > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\cdot c \quad \forall\lambda > 0 \end{array}\right.$$

Beweis

$i) \Rightarrow ii)$: Wähle zu $\lambda > 0$ eine fallende Folge $\lambda_m \searrow \lambda,\ \lambda_m > \lambda$

$\Rightarrow \{Z \geq \lambda_m\} \nearrow \{Z > \lambda\}$ d.h.: $\cup_m \{Z \geq \lambda_m\} = \{Z > \lambda\}$ denn: $\left[\begin{array}{ll} "\subset"\ Z \geq \lambda_m > \lambda & \text{für ein } m \\ "\supset"\ Z > \lambda \Rightarrow Z \geq \lambda_m & \text{für ein } m \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z \geq \lambda_m) \overset{i)}{\leq} \frac{1}{\lambda_m}\cdot c$$

Maßstetigkeit von unten $\downarrow$ $\downarrow$

$$\mathbb{P}(Z > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\cdot c \qquad \Rightarrow ii)$$

$ii) \Rightarrow i)$: Wähle zu $\lambda > 0$ eine aufsteigende Folge $\lambda_m \nearrow \lambda,\ \lambda_m < \lambda$

$\Rightarrow \{Z > \lambda_m\} \searrow \{Z \geq \lambda\}$ d.h.: $\cap_m \{Z > \lambda_m\} = \{Z \geq \lambda\}$ denn: $\left[\begin{array}{l} "\supset"\ Z \geq \lambda > \lambda_m\ \forall m \\ "\subset"\ Z > \lambda_m \forall m \Rightarrow Z \geq \lim_m \lambda_m = \lambda \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z > \lambda_m) \overset{ii)}{\leq} \frac{1}{\lambda_m}\cdot c$$

Maßstetigkeit von oben $\downarrow$ $\downarrow$

$$\mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\cdot c \qquad \Rightarrow i)$$

1.3d Martingale in stetiger Zeit (1)

Doob'sche Submartingal-Ungleichung (in diskreter Zeit)

$$(X_n)_n \text{ Submartingal} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} \quad \mathbb{P}(\sup_{k\le N} X_k \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_N^+) \qquad \forall \lambda > 0 \qquad (*_1)$$

$\Downarrow$ „Stetigkeitsargument"

Doob'sche Submartingal-Ungleichung (in stetiger Zeit)

$$\left.\begin{array}{l}(X_t)_{t\ge0}\ (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}\text{-Submartingal}\\ \text{Pfade von } (X_t)_t \textbf{\textit{ rechtstetig}}\end{array}\right\} \underset{t>0}{\Rightarrow} \quad \mathbb{P}(\sup_{0\le s\le t} X_s \ge +\lambda) \le \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_t^+) \quad \forall\lambda > 0$$

Beweis Sei $t > 0$.

Sei $(X_t)_{t\ge0}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$-Submartingal mit rechtsstetigen Pfaden.

Zeitdiskretisierung Sei $n \in \mathbb{N}$.

Definiere zeitdiskreten stoch. Prozess $(Y_k)_k$ durch $Y_k := X_{\frac{k\cdot t}{2^n}}$

Definiere zeitdiskrete Filtrierung durch $\mathcal{F}_k := \mathcal{F}_k^Y := \sigma(Y_0,\dots,Y_k)$

$\Rightarrow (Y_k)_k\ (\mathcal{F}_k)_k$-Submartingal

$$\lambda > 0 \underset{N:=2^n}{\overset{(*_1)}{\Rightarrow}} \quad \mathbb{P}(\sup_{k\le 2^n} X_{\frac{k\cdot t}{2^n}} > \lambda) = \mathbb{P}(\sup_{k\le N} Y_k > \lambda) \overset{(*_1)}{\le} \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(Y_N^+) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_t^+) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Beobachtung

$\boxed{Y_N = Y_{2^n} = X_t}$

Doob'sche Submartingal-Ungleichung (in stetiger Zeit)

$$\left.\begin{array}{l}(X_t)_{t\ge0}\ (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}\text{-Submartingal}\\ \text{Pfade von } (X_t)_t \textbf{\textit{ rechtstetig}}\end{array}\right\} \underset{t>0}{\Rightarrow} \quad \mathbb{P}(\sup_{0\le s\le t} X_s \ge +\lambda) \le \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_t^+) \quad \forall\lambda > 0$$

Beweis Sei $t > 0$. Sei $(X_t)_{t\ge0}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$-Submartingal mit rechtsstetigen Pfaden.

Zeitdiskretisierung Sei $n \in \mathbb{N}$.

Definiere zeitdiskreten stoch. Prozess $(Y_n)_n$ durch $Y_k := X_{\frac{k\cdot t}{2^n}}$

Definiere zeitdiskrete Filtrierung durch $\mathcal{F}_k := \mathcal{F}_k^Y := \sigma(Y_0,\dots,Y_k)$

$\Rightarrow (Y_k)_k\ (\mathcal{F}_k)_k$-Submartingal

$$\lambda > 0 \underset{N:=2^n}{\overset{(*_1)}{\Rightarrow}} \mathbb{P}(\sup_{s'\in F_n} X_{s'} > \lambda) = \mathbb{P}(\sup_{k\le 2^n} X_{\frac{k\cdot t}{2^n}} > \lambda) = \mathbb{P}(\sup_{k\le N} Y_k > \lambda) \overset{(*_1)}{\le} \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(Y_N^+) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_t^+) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

(R.S. unabhängig von n)

$$F_n := \{0, \frac{1\cdot t}{2^n}, \dots, \frac{2^n\cdot t}{2^n} = t\} \quad \Rightarrow F := \bigcup_{n\ge1} F_n \ \textbf{ dicht} \text{ in } [0,t]$$

Limes $n \to \infty$

Maßstetigkeit von unten

$$F_n \nearrow F \quad \Rightarrow \{\sup_{s'\in F_n} X_{s'} > \lambda\} \nearrow \{\sup_{s'\in F} X_{s'} > \lambda\} = \{\sup_{s\in[0,t]} X_s > \lambda\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\sup_{s'\in F_n} X_{s'} > \lambda\right) \to \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} X_s > \lambda)$$

rechtsstetige Pfade

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} X_s > \lambda\right) \le \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_t^+) \quad \forall\lambda > 0$$

Beob.

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} X_s \ge \lambda\right) \le \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_t^+) \quad \forall\lambda > 0$$

$\forall\, s \in [0,t]\ \exists (s_l')_l \subset F$ mit $s_l' \searrow s$

r-st.

$\Rightarrow X_s(\omega) = \lim_{l\to\infty} X_{s_l'}(\omega) \le \sup_{s'\in F} X_{s'}(\omega)$

$\Rightarrow \sup_{s\in[0,t]} X_s(\omega) \le \sup_{s'\in F} X_{s'}(\omega)$

"$\ge$" klar