

UNIVERSITÄT BIELEFELD
Fakultät für Mathematik
Universitätsstr. 25
33615 Bielefeld

Diplomarbeit

Konstruktionen zufälliger lokal endlicher Mosaik, insbesondere Laguerrescher

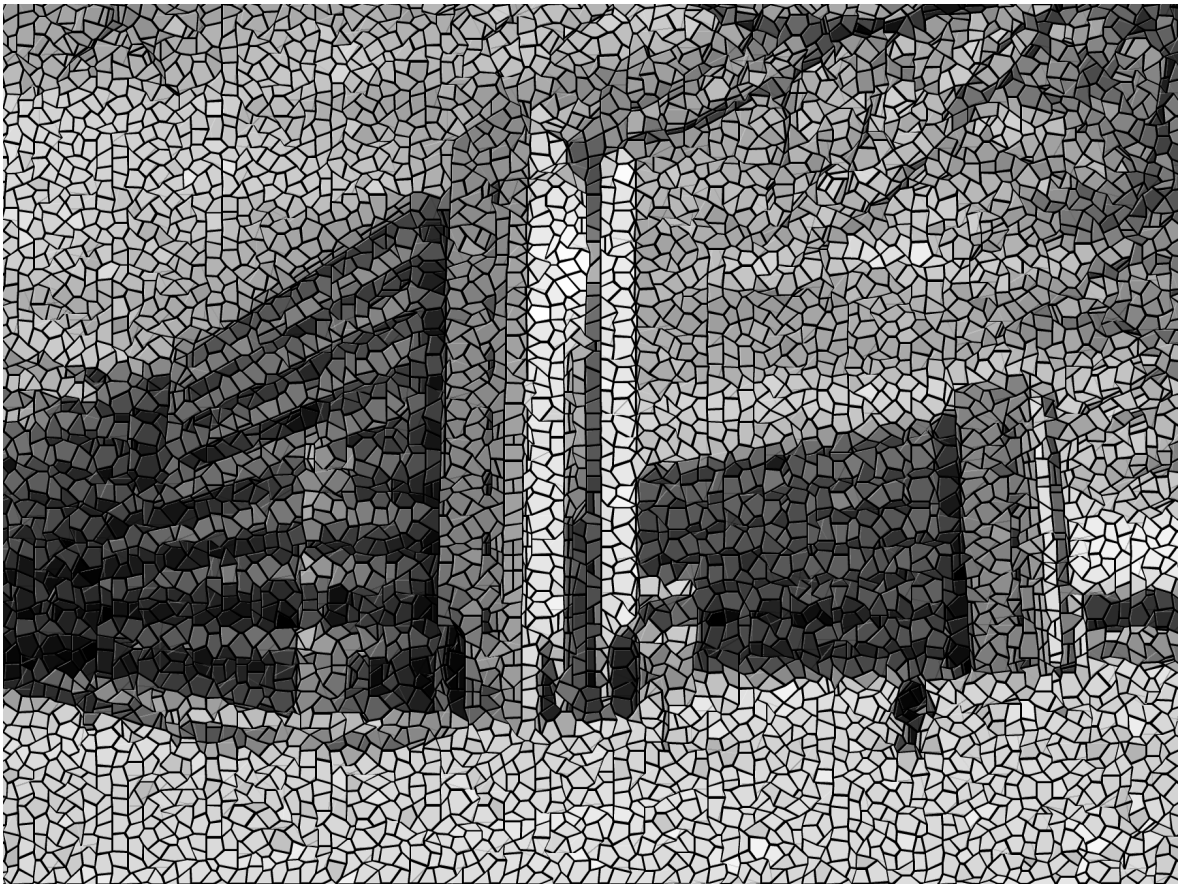
Kai Miguel Matzutt

4. September 2006

betreut durch Herrn Professor Dr. Hans Zessin

Diese Diplomarbeit wurde mit Hilfe von KOMA-Script und LaTeX gesetzt

Meiner Familie und meinen Freunden,
die mich mit viel Geduld durch mein Studium hindurch ge- und
ertragen haben



(die Universität Bielefeld als Mosaik)

Einleitung

Auch wenn man den Begriff eines Mosaiks eher mit den Glasfenstern alter Kirchen oder den Böden antiker Baderäume in Verbindung bringt, so finden sich ähnliche Strukturen ebenfalls in der Natur (vergleiche [OBS92] S. 278), z.B. als Muster auf der Haut (Abbildung 0.1) und tieferliegend sogar als Struktur der Hautzellen, aber auch in technischen Anwendungen, wie der Computergrafik (siehe z.B. [Wik]). In den entsprechenden Modellierungen dieser



Abbildung 0.1.: Hier erkennt man mit etwas Wohlwollen die Mosaikstruktur der menschlichen Haut (Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Human_skin_structure.jpg. Dieses Bild steht unter der GNU-Lizenz für freie Dokumentation, Fotograf: XenonR)

Phänomene geht es darum, einen Raum, eine Fläche oder allgemein ein geometrisches Objekt in einer geeigneten Weise mit vielen einfacheren oder kleineren Objekten zu überdecken, zu beschreiben oder gar darzustellen, so wie versucht wurde, den gesamten Boden eines antiken Baderaums mit Keramik-Scherben zu pflastern. Selbst unabhängig von „echten Anwendungen“ finden sich in der Mathematik Fragen und Problemstellungen, die man mit Modellen untersuchen kann, die in vielerlei Hinsicht solchen Pflasterungen ähneln.

So widmen sich Mathematiker vieler Fachgebiete der Konstruktion mathematischer Modelle für Mosaik, immer angepasst an ihre spezifischen Bedürfnisse. Topologen interessiert z.B. die *Triangulisierung von Mannigfaltigkeiten* (vergleiche z.B. [Blo97] S. 135), Spezialisten auf dem Gebiet der konvexen oder diskreten Geometrie beschäftigen sich mit *Komplexen* ([Grü67]) oder *Parkettierungen* ([Sch93b]).

Viele Anwendungen legen nahe, den Zufall mit ins Spiel zu bringen. Und so beschäftigt sich die stochastische Geometrie unter anderem mit *zufälligen Mosaiken* (siehe [SW00] ab S. 232). Die Elemente dieser Mosaiken sind konvexe Polytope. Der übliche Zugang zu diesen zufälligen Mosaiken basiert auf *Punktprozessen*.

Dabei nutzt man Verfahren, bestimmte diskrete Punktkonfigurationen in eine Kollektion von konvexen Polytopen umzuwandeln. Im Idealfall bilden diese dann ein Mosaik. Beispielsweise bilden die zu einer diskreten Punktkonfiguration im \mathbb{R}^d gehörigen *Voronoi-Zellen* eine bekannte Kollektion solcher Polytope. So gehört zu jedem Punkt q der Konfiguration ein Polytop, das genau aus den Punkten des \mathbb{R}^d besteht, die näher an q liegen als an allen anderen Punkten der Konfiguration. In diesem Kontext ist ebenfalls die dazu duale Kollektion der *Delaunay-Zellen* zu nennen.

In [Sch93a] wird eine Möglichkeit präsentiert, aus Punktkonfigurationen mit gewissen Eigenschaften Polytope zu erzeugen. Das angewandte Verfahren ist gestützt auf die Konstruktion von Voronoi-Zellen, erweitert diese aber in einem gewissen Sinne. Dabei wird die Euklidische Metrik, die die Voronoi-Zellen formt, durch Gewichtung der Punkte in der Konfiguration deformiert. Den Voronoi-Zellen entsprechen dann so genannte Laguerresche Bereiche. Diese bilden analog zu den Voronoi-Zellen ein Mosaik. Ebenso wird der Begriff der *Dualität* in [Sch93a] anders geprägt und führt uns zu weiteren Mosaiken, die aber wiederum mit den Delaunay-Mosaiken in Verbindung gebracht werden können.

Eine zufällige Version dieser *Laguerreschen Mosaiken* wurde bisher jedoch noch nicht untersucht.

Zur Struktur und den Zielen dieser Diplomarbeit

Die Grundlagen der Theorie von Punktprozessen und Mosaiken in [SW00] beruhen auf topologischen Konstruktionen, die in [Mat75] entwickelt wurden. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, die zugehörige Theorie auf ein rein maßtheoretisches Fundament, wie es in [Rip76] eingeführt wird, zu stellen. Dieses wird in Kapitel 1 präsentiert. Die bereitgestellte Theorie umfasst *Zählmaße* auf *Phasenräumen* genauso wie eine Theorie von *zufälligen Maßen* bzw. *Punktprozessen*. Insbesondere beschreibt Abschnitt 1.4 einen Phasenraum, basierend auf den *endlichen Punktkonfigurationen* $\mathcal{M}_f(E)$ in einem euklidischen Raum E , der in späteren Kapiteln einen Rahmen für die Diskretisierung von Polytopen und Mosaiken bereitstellt.

In Kapitel 2 wird dann in Anlehnung an [Zes05a] mit den *Cluster-Eigenschaften* ein Begriff eingeführt, der *messbare* Beziehungen zwischen lokal endlichen Punktmaßen und (Kollektionen von) endlichen Punktkonfigurationen, den *Clustern*, beschreibt. Dies ermöglicht ähnliche Konstruktionen wie Voronoi-Mosaiken, bei denen eben eine Verbindungen zwischen Punktkonfigurationen und Polytopen besteht. Das *Null-Unendlich-Gesetz der stochastischen Geometrie*

wird ebenfalls in diesem Kapitel angepasst an Cluster-Eigenschaften bewiesen. Damit steht dann ein Mittel zur Analyse von speziellen *Cluster-Prozessen* zur Verfügung, die in Kapitel 5 zur Konstruktion einer Klasse zufälliger Mosaike benutzt werden.

In Kapitel 3 werden die Definitionen der klassischen geometrischen Objekte, die für die Konstruktion von Mosaiken benötigt werden, diskretisiert und damit für den Kontext der Cluster-Eigenschaften vorbereitet.

In Kapitel 4 werden dann die ersten beiden Klassen von zufälligen Mosaiken konkret konstruiert. Dazu wird die in [Sch93a] präsentierte Theorie über Laguerresche Bereiche für die maßtheoretischen Bedürfnisse, vor allem Messbarkeitsfragen, angepasst und in diesem Kontext vollständig entwickelt. Dazu wird unter anderem zum bekannten messbaren Raum $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}))$ ein besonderes System beschränkter Mengen konstruiert, so dass die geometrischen Konstruktionen aus [Sch93a] funktionieren und vorgestellt werden können. Im Anschluss wird dann eine Cluster-Eigenschaft definiert, mit deren Hilfe eine Klasse von Cluster-Prozessen konstruiert wird. Mit diesen wird ein Hauptziel dieser Arbeit erreicht, nämlich *zufällige Laguerresche Mosaike* zu realisieren. Genutzt werden dazu bestimmte *Poissonsche Punktprozesse*. In Abschnitt 4.3 wird dann ein weiteres zufälliges Mosaik entwickelt, aufbauend auf einer Abbildung, die einem passenden Punktmaß sein *duales* im Sinne von [Sch93a] zuordnet.

Die mit Hilfe der Laguerreschen Bereiche definierten zufälligen Mosaike werden den \mathbb{R}^d komplett überdecken. Von einem topologischen Standpunkt aus gesehen sind aber auch Mosaike mit Lücken bzw. Löchern interessant. So besteht das letzte Ziel dieser Arbeit darin, ebenfalls ein solches zu konstruieren. In Kapitel 5 wird durch eine Erweiterung der *Delaunay-Eigenschaft* ein zufälliges simpliziales Mosaik mit Löchern erzeugt. Dazu werden eine *translations-invariante* Cluster-Eigenschaft, die die Bedingungen des Null-Unendlich-Gesetzes erfüllt und ein zugehöriger Cluster-Prozess benutzt.

Danksagung

Zuallererst möchte ich meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Hans Zessin, für das Ermöglichen dieser Diplomarbeit danken. Er stand mir zu jeder Zeit sowohl fachlich als auch menschlich zur Seite. Die Diskussionen mit ihm waren mir nicht nur sehr hilfreich, sie haben mir auch oft die Schönheit der Mathematik offenbart.

Großer Dank gebührt auch Herrn Prof. Dr. Michael Baake. Er hat Herrn Zessin und damit mich auf die Dissertation [Sch93a] aufmerksam gemacht, auf der große Teile dieser Diplomarbeit aufbauen.

Diese Beiden haben mir somit ein so interessantes und schönes Thema übergeben, dass es für mich trotz großer Mühen und hoher mathematischer Hürden während der ganzen Zeit niemals den Reiz verloren hat.

Ich bedanke mich ebenfalls bei Janosch Rieger für zahlreiche Anregungen und Ratschläge, die diese Arbeit sicherlich verbessert haben.

Nadine Geppert und Matthias Schöpfer danke ich für die Durchsicht dieser Arbeit. Sie waren das scharfe Auge, das mir so oft fehlte. Auch halfen sie mir dabei, dass mich die Wege der neuen Deutschen Orthografie nicht haben verzweifeln lassen.

Meiner ganzen Familie und meinen guten Freunden möchte ich für ihren Rückhalt danken. Wollte ich mit wenigen Worten alledem gerecht werden, was ich ihnen verdanke, müsste ich ein wahrer Poet sein. Aber sicher ist: Ohne sie wäre der lange Weg meines Studiums sehr viel schwerer gewesen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	vii
Konventionen und Schreibweisen	1
1. Zufällige Maße	3
1.1. Phasenräume	3
1.2. Lokal endliche Maße	7
1.2.1. Zählmaße	8
1.3. Zufällige Maße und Punktprozesse	15
1.3.1. Stationäre zufällige Maße	16
1.3.2. Die Methode des Campbell-Maßes	16
1.3.3. Der Poissonsche Punktprozess	18
1.4. Endliche Punktkonfigurationen als Phasenraum	23
2. Cluster-Eigenschaften	29
2.1. Definitionen und Beispiele	29
2.2. Das Null-Unendlich-Gesetz der stochastischen Geometrie	32
2.3. Anwendungen des Null-Unendlich-Gesetzes	34
3. Anpassung der geometrischen Begriffe	39
3.1. Konvexe Polytope	39
3.2. Simplizes	43
3.3. Lokal endliche Mosaik	45
4. Zufällige vollständige Mosaik	49
4.1. Der Laguerresche Phasenraum	49
4.2. Laguerresche zufällige Mosaik	56
4.2.1. Laguerresche Mosaik	56
4.2.2. Der Poisson-Laguerre-Prozess	71
4.3. Das zu einem Laguerreschen duale Mosaik	73
4.4. Der duale Poisson-Laguerre-Prozess	78

5. Ein nicht vollständiges zufälliges Mosaik	79
5.1. Radius-beschränkte Delaunay-Cluster	79
5.2. Ein Poisson-Delaunay-Mosaik mit Lücken	86
Anhang	94
A. Messbarkeitsfragen	97
A.1. Messbarkeit bestimmter Abbildungen	97
A.2. Messbarkeit bestimmter Mengen	110
Symbolverzeichnis	115
Literaturverzeichnis	121
Index	125

Abbildungsverzeichnis

0.1. Hier erkennt man mit etwas Wohlwollen die Mosaikstruktur der menschlichen Haut	vii
2.1. Die Abbildung φ_D erzeugt „harte Kugeln“	31
3.1. Eine Kollektion von konvexen Polytopen	41
3.2. Veranschaulichung der Definition eines diskreten Polytops	42
3.3. Beziehung zwischen diskreten und klassischen Polytopen	42
3.4. Klassische Simplizes	44
3.5. Ein Mosaik, „wie man es sich vorstellt“	46
3.6. Überlappung von Polytopen	47
4.1. Zylinder-Mengen $A \times \mathbb{R}$	50
4.2. Der Paraboloid zu einem Punkt $f \in E = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}$	52
4.3. Zu jeder metrisch beschränkten Menge B gibt es $f \in E$, so dass $B \subseteq p(f)$. . .	53
4.4. Verschiedene Ausprägungen eines Laguerreschen Bereiches bei unterschiedlichen Gewichten aber gleichen Ortskoordinaten der Punkte in η	58
4.5. Ein Voronoi-Mosaik, d.h. ein Laguerre-Mosaik bei gleichen Gewichten	59
4.6. Jeder Vektor in \mathbb{R}^d besitzt die Darstellung $v = q(e) + \lambda v'$	64
4.7. Veranschaulichung der Abbildung dual anhand der Ortsprojektionen der entsprechenden Punktmaße	74
5.1. Ein Beispiel für ein D_R -Cluster x in gegebener Konfiguration η	83
5.2. Beispiele für <i>nicht</i> -Cluster in einer Konfiguration η	84
5.3. Ein Beispiel eines Mosaiks, das aus D_R -Clustern einer Konfiguration η besteht	85
5.4. Fall 1; Die Umkugeln der Simplizes treffen sich in genau einem Punkt	85
5.5. Fall 2; Die Umkugeln der Simplizes treffen sich in einer $(d - 2)$ -Sphäre	86
5.6. Die affine Unabhängigkeit von Punkten ist stabil unter kleinen Änderungen .	88
5.7. Auch all diese ε -Kugeln müssen von Simplizes überdeckt werden	90
5.8. Es muss Lücken geben	91
5.9. Die Mengen sind so gewählt, dass sie paarweise disjunkt sind	92

A.1. Der Schnitt aller solcher Mengen bildet die Diagonale 111

Konventionen und Schreibweisen

Um Verwirrungen und Unklarheiten durch unbekannte Konventionen und Schreibweisen zu vermeiden, wollen wir zunächst festhalten, was vorausgesetzt und welche wohl bekannten mathematischen Konstrukte wie bezeichnet werden.

Die disjunkte Vereinigung zweier Mengen A und B sei mit $A \dot{\cup} B$ symbolisiert. Das Komplement (im Bezug auf eine bekannte Grundmenge) zu einer Menge A sei mit A^c bezeichnet. Weiter sei für zwei Mengen A, B die Differenz $A \setminus B := A \cap B^c$.

In der Arbeit bewegen wir uns oft im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^d . Die analytischen Eigenschaften und Schreibweisen sind dabei [For99a; For99b] entnommen. Abweichend davon benutzen wir sowohl für den Betrag $|r|$ einer Zahl $r \in \mathbb{R}$ als auch für die euklidische Norm $\|v\|$ eines Vektors $v \in \mathbb{R}^d$ die gleiche Symbolik. Die jeweilige Bedeutung von $\|\cdot\|$ sollte aber aus dem Zusammenhang klar werden. Als Symbol für die rein positiven reellen Zahlen sei \mathbb{R}^+ gewählt. Weiter sei $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ und analog $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ die natürlichen Zahlen zusammen mit der 0. Eine Klammer der Art „[“ bzw. „]“ bestimmt eine abgeschlossene, Klammern vom Typ „(“ bzw. „)“ eine offene Intervallgrenze, sprich ob die jeweiligen Grenzpunkte mit zum Intervall gehören oder nicht. Die abgeschlossene Kugel in \mathbb{R}^d mit Mittelpunkt in $a \in \mathbb{R}^d$ und Radius $r \in \mathbb{R}$ sei mit $B_r(a)$, die entsprechende offene mit $\mathring{B}_r(a)$ bezeichnet. Weiter sei die punktierte abgeschlossene Kugel $\mathring{B}_r(a)$ um a mit Radius r gegeben durch $B_r(a) \setminus \{a\}$. Ist (\mathcal{S}, d) ein metrischer Raum und B eine metrisch beschränkte Menge, dann sei der Durchmesser von B gegeben durch $\text{diam } B := \sup \{d(b_1, b_2) \mid b_1, b_2 \in B\}$. Die $(d-1)$ -dimensionale Einheitssphäre in \mathbb{R}^d ist gegeben durch $S^{d-1}(\mathbb{R}^d) := \{\hat{v} \in \mathbb{R}^d \mid \|\hat{v}\| = 1\}$.

Der offene Kern, also die Menge der inneren Punkte einer Menge M in einem topologischen Raum seien generell mit $\overset{\circ}{M}$ bezeichnet. Der Rand von M sei mit ∂M bezeichnet.

Grundsätzliches Vorwissen, das für die lineare Algebra in dieser Arbeit benötigt wird, findet sich in [Fis97]. Das euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren wird hier durch das Zeichen „ \cdot “ gekennzeichnet. Das Skalarprodukt eines Vektors v mit sich selber wird teilweise mit v^2 abgekürzt.

Die für diese Diplomarbeit sehr wichtigen Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie sind in [Bau92] nachzulesen. Die Bezeichnungen und Schreibweisen werden mit kleinen Abweichungen bzw. Ergänzungen übernommen. Der Darstellungssatz von Riesz ermöglicht es uns, Maße über einem messbaren Raum (X, \mathcal{A}) durch Funktionale I auf $\mathcal{F}_+(X)$, den positiven

\mathcal{A} -messbaren Funktionen auf X , zu beschreiben und direkt mit den zugehörigen Maßen zu identifizieren. In diesem Sinne sind dann Wendungen wie $I(A)$, $A \in \mathcal{A}$ zu verstehen. Umgekehrt gehört zu einem Maß μ eben ein Funktional, so dass $\mu(f)$, $f \in \mathcal{F}_+(X)$ mit Sinn versehen ist. Indikatorfunktionen zu einer Menge B seien mit 1_B bezeichnet. Das Bild eines Maßes μ unter einer messbaren Transformation T , werden wir sowohl mit $T\mu$ als auch mit $\mu \circ T^{-1}$ bezeichnen.

Wir betrachten auch oft *Tensorprodukte von Abbildungen*, d.h. sind $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Abbildungen, so bezeichnet $f \otimes g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ die vermöge $X \times Y \ni (x, y) \mapsto f(x) \cdot g(y)$ definierte Abbildung. Natürlich kann \mathbb{R} durch beliebige Mengen, auf denen eine Multiplikation definiert ist, ersetzt werden.

1. Zufällige Maße

Wesentliche Teile dieser Diplomarbeit beschäftigen sich mit zufällig realisierten geometrischen Objekten und Punktkonfigurationen. In diesem Kapitel werden wir ein sicheres theoretisches Fundament für solche Ideen bereitstellen.

Angelehnt an [Rip76] verzichten wir dabei weitgehend auf topologische Grundlagen und benutzen vornehmlich maßtheoretische Methoden. Viele Standardwerke der stochastischen Geometrie (siehe z.B. [SW00]) gehen einen anderen Weg und deswegen wird an markanten Stellen versucht werden, den „topologischen Weg“ als einen Sonderfall des hier gewählten Zuganges zu kennzeichnen. Die Ideen entstammen der Theorie zufälliger Maße auf lokal kompakten Räumen mit abzählbarer (topologischer) Basis. Und solche (besonders den \mathbb{R}^n) sollte man sich bei der folgenden abstrakten Betrachtung vorstellen.

Da dieser Zugang nur wenig oder gar nicht in Werken der stochastischen Geometrie beschrieben wird, werden wir der Vollständigkeit halber Aussagen beweisen, die im topologischen Spezialfall als bekannt vorausgesetzt werden können. Die Ideen und Beweise entstammen größtenteils [Zes05b] und [Zes06].

1.1. Phasenräume

Grundlage der folgenden Überlegungen bildet eine spezielle Klasse von messbaren Räumen (X, \mathcal{A}) , wobei X eine beliebige Menge darstellt und \mathcal{A} eine σ -Algebra in X ist, die zumindest alle einelementigen Teilmengen von X enthält.

Unser erster Schritt besteht darin, so etwas wie *Lokalität* zu definieren. Angelehnt an metrische Räume erreichen wir das durch die Angabe der *beschränkten* Mengen. Genauer:

Definition 1.1.1. Sei (X, \mathcal{A}) , wie oben, gegeben, also sei insbesondere $\{x\} \in \mathcal{A}$ für alle $x \in X$. Weiter gebe es ein Teilmengensystem $\mathcal{B}(X)$ von X , genannt *die beschränkten Mengen von X* , das die folgenden Bedingungen erfüllt:

(B_1) Ist $B \in \mathcal{B}(X)$ und $C \subset B$, dann ist auch $C \in \mathcal{B}(X)$ (, d.h. $\mathcal{B}(X)$ ist *hereditär*).

(B_2) $\mathcal{B}(X)$ ist abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen. (Wir sagen $\mathcal{B}(X)$ ist *\cup -abgeschlossen*.)

(B₃) Es existiert eine Folge $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{B}(X) \cap \mathcal{A} =: \mathcal{B}_0(X)$, so dass $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$.

(B₄) Für jedes $B \in \mathcal{B}(X)$ gibt es ein $B_0 \in \mathcal{B}_0(X)$ mit $B \subset B_0$.

In diesem Fall nennen wir das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ einen σ -beschränkten messbaren Raum¹.

Während die ersten beiden geforderten Eigenschaften offensichtlich der üblichen Vorstellung von Beschränktheit entsprechen, bedürfen die Letzteren einer Erläuterung.

So erlaubt (B₃) immer eine Lokalisierung, insbesondere bei Fragen der Messbarkeit von Mengen und Abbildungen. Mit anderen Worten: Es reicht dank dieser Bedingung meist, Eigenschaften lokal, d.h. innerhalb einer beschränkten Menge, zu überprüfen. (B₃) impliziert nämlich, dass es eine gegen X aufsteigende Folge $(\tilde{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}_0(X)$ gibt, d.h. $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{B}_i$ und $\tilde{B}_i \subseteq \tilde{B}_j$ für $i \leq j$. (Wir schreiben dann $B_i \uparrow X, i \rightarrow \infty$.)² Per Übergang $i \rightarrow \infty$ erhält man dann die Eigenschaft global, d.h. in ganz X . Wir wollen eine solche Folge *Lokalisierung von X* nennen.

Die Eigenschaft (B₄) gestattet es, lokale Betrachtungen immer ohne Beschränkung der Allgemeinheit in messbaren Bereichen durchzuführen.

Bevor wir eine weitere von uns benötigte Eigenschaft einführen, seien hier ein paar Beispiele für σ -beschränkte messbare Räume gegeben:

Beispiele 1.1.2. (i) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum, so dass alle einpunktigen Mengen messbar sind. Wählt man als beschränkte Mengen, die Mengen die in solchen von endlichem Maß enthalten sind, also

$$\mathcal{B} := \{A \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{A} : \mu(B) < +\infty \text{ und } A \subseteq B\}.$$

Dann ist $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ offensichtlich ein σ -beschränkter messbarer Raum.

(ii) Da wir uns im Rahmen der Arbeit meist mit dem euklidischen \mathbb{R}^d beschäftigen, ist für uns dieses Beispiel wichtig: Sei (\mathcal{S}, d) ein metrischer Raum, versehen mit der Borel- σ -Algebra, bzgl. der von der Metrik induzierten Topologie. Die beschränkten Mengen seien die metrisch beschränkten Mengen. Da diese Menge alle Kugeln enthält, reicht es für (B₃), dass die Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Nun kommen wir zu der bereits angekündigten weiteren Eigenschaft. Sie entspricht einem Trennungs-Axiom in der Topologie und ist eng verwandt mit der *Hausdorff-Eigenschaft* topologischer Räume:

¹Ist klar, um welchen Grundraum X es sich handelt, so seien die beschränkten Mengen auch kurz nur mit \mathcal{B} bezeichnet.

²Wähle zum Beispiel für $\tilde{B}_j := \bigcup_{i=1}^j B_i$.

Definition 1.1.3. Ein σ -beschränkter messbarer Raum heißt *abzählbar separiert*, wenn es eine abzählbare und unter endlichen Schnitten abgeschlossene Teilmenge $\tilde{\mathcal{B}}_0 \subseteq \mathcal{B}_0$ gibt, die die Punkte von X im folgenden Sinne trennt:

Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, eine endliche Teilmenge von X . Dann gibt es $B_1, \dots, B_n \in \tilde{\mathcal{B}}_0$, paarweise disjunkt, so dass $x_i \in B_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Wir wollen dann $\tilde{\mathcal{B}}_0$ die *separierenden Mengen* nennen. Einen σ -beschränkten abzählbar separierten Raum wollen wir einfach kurz *Phasenraum* nennen.

Auch hierfür gibt es prominente Beispiele:

Beispiele 1.1.4. (i) Im weiteren Verlauf der Arbeit wird uns der Raum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ als Grundlage dienen, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borelmengen von \mathbb{R}^d bzgl. der von der euklidischen Metrik erzeugten Topologie und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die metrisch beschränkten Mengen des \mathbb{R}^d sind. Eine mögliche Wahl für die separierenden Mengen sind dann die verallgemeinerten offenen Intervalle bzw. Rechtecke $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_d, b_d)$ mit rationalen Eckpunkten $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{Q}$ und somit ist $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B})$ ein σ -beschränkter messbarer Raum, der abzählbar separiert ist.

Dies ist ein Spezialfall dessen, was Grundlage der stochastischen Geometrie z.B. für [SW00] und [Mat75] ist:

(ii) Es sei (T, \mathcal{T}) ein lokal kompakter³ topologischer Raum mit abzählbarer Basis⁴. Wählt man als beschränkte Mengen die relativ kompakten Mengen, als σ -Algebra die Borel- σ -Algebra bezüglich \mathcal{T} , so ergeben sich die Eigenschaften eines Phasenraums aus Satz 2.1.1, S. 35, in [SW00] und der Hausdorff-Eigenschaft.

(iii) Recht offensichtlich aber dennoch erwähnenswert ist folgender abzählbar separierter σ -beschränkter messbarer Raum:

Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mathcal{B}(X_i))$ Phasenräume für $i = 1, \dots, d$. Dann ist für $X = X_1 \times \dots \times X_d$, $\mathcal{A} = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$ das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ wieder ein Phasenraum, wenn man als beschränkte Mengen

$$\mathcal{B}(X) := \{B \subset X_1 \times \dots \times X_d \mid B \subset B_1 \times \dots \times B_d, B_1 \in \mathcal{B}(X_1), \dots, B_d \in \mathcal{B}(X_d)\}$$

wählt. Dies ist im Prinzip die analoge Bildung zu $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ und auch die separierenden Mengen erhält man dann genauso durch „verallgemeinerte Rechtecke“.

³Ein topologischer Raum heißt lokal kompakt, wenn er Hausdorffsch ist und jeder seiner Punkte mindestens eine kompakte Umgebung besitzt. Eine Menge heißt dann relativ kompakt, wenn ihre abgeschlossene Hülle kompakt ist. (Vergleiche [tD91], S. 372.)

⁴Ein solcher Raum ist metrisierbar, siehe [SW00], S. 34.

- (iv) Damit wir bekannte Phasenräume an unsere Bedürfnisse anpassen können, ist folgende Konstruktion wichtig: Sei $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ ein σ -beschränkter messbarer Raum und $X_0 \subset X$. Dann ist leicht einzusehen, dass auch $(X_0, \mathcal{A} \cap X_0, \mathcal{B}(X) \cap X_0)$ ein Phasenraum ist, wobei $\mathcal{A} \cap X_0$ die Spur- σ -Algebra von \mathcal{A} bzgl. X_0 und analog

$$\mathcal{B}(X) \cap X_0 := \{B \cap X_0 \mid B \in \mathcal{B}(X)\}$$

bezeichne. Wir werden diesen Phasenraum den *Spur-Phasenraum* von $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ bzgl. X_0 nennen.

Wir benötigen nun noch eine Konstruktion, die es uns erlaubt verschiedene Systeme beschränkter Mengen zu kombinieren:

Lemma 1.1.5. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und für $i = 1, \dots, n$ seien $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}_i)$ Phasenräume. Ist*

$$\mathcal{B} := \left\{ B \subseteq X \mid \text{Es gibt } B_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, \dots, n, \text{ so dass } B \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i \right\},$$

dann ist auch $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein Phasenraum.

Beweis. Zu (B_1) : Ist $B \in \mathcal{B}$ und $C \subseteq B$, dann gibt es nach Definition $B_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, \dots, n$, so dass $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$. Aber dann gilt auch automatisch $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$ und somit $C \in \mathcal{B}$.

Zu (B_2) : Es sei $B = \bigcup_{j=1}^m B^j, B^j \in \mathcal{B}$. Dann gibt es $B_1^j \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n^j \in \mathcal{B}_n$, so dass $B^j \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i^j$. Weiter ist dann $\tilde{B}_i := \bigcup_{j=1}^m B_i^j \in \mathcal{B}_i$ für $i = 1, \dots, n$, da jedes Tupel $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}_i)$ Phasenraum ist, und damit die \mathcal{B}_i abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen. Aber dann ist $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n \tilde{B}_i$, also ebenfalls beschränkt.

Zu (B_3) : Offensichtlich ist jede beschränkte Menge z.B. aus \mathcal{B}_1 auch in \mathcal{B} . Da aber schon $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}_1)$ Phasenraum ist, gibt es schon dort eine Folge $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von messbaren beschränkten Mengen, deren Vereinigung ganz X ist. Damit hat trivialerweise auch $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ diese Eigenschaft.

Zu (B_4) : Es sei $B \in \mathcal{B}$, also $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$ mit $B_i \in \mathcal{B}_i$ für $i = 1, \dots, n$. Wieder da $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}_i)$ Phasenräume sind, gibt es messbare Mengen $\tilde{B}_i \in \mathcal{B}_i$, so dass $B_i \subseteq \tilde{B}_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist $\tilde{B} = \bigcup_{i=1}^n \tilde{B}_i$ nach Konstruktion in \mathcal{B} , ebenfalls messbar, da σ -Algebren abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen sind, und es gilt $B \subset \tilde{B}$.

Um zu zeigen, dass $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ abzählbar separiert ist, reicht es analog zum Beweis der Eigenschaft (B_4) , darauf hinzuweisen, dass schon jedes System \mathcal{B}_i eine separierende Folge enthält, die damit ebenfalls in \mathcal{B} liegt.

Also ist $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein Phasenraum. □

Definition 1.1.6. Wir bezeichnen die wie in Lemma 1.1.5 konstruierten beschränkten Mengen \mathcal{B} als die *durch die Systeme $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, n$ erzeugten beschränkten Mengen*. Wir wollen sie mit $\mathcal{B}(\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, n)$ bezeichnen.

1.2. Lokal endliche Maße

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit speziellen Mengen von Maßen. Inspiriert sind diese von der Theorie von Radonmaßen auf lokal kompakten Räumen, siehe [Bau92] ab S. 191, und von Räumen von Zählmaßen, wie sie in [KMM74], S. 1-2, definiert sind.

Als Grundraum sei in diesem Abschnitt ein Phasenraum $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ fixiert.

Definition 1.2.1. Ein Maß μ auf (X, \mathcal{A}) heiße *lokal endliches Maß (auf X)*, wenn fur alle beschränkten messbaren Mengen $B \in \mathcal{B}_0(X)$ gilt, dass $\mu(B) < +\infty$. Die Menge der lokal endlichen Maße auf X sei mit $\mathcal{M}(X)$ bezeichnet, bzw. mit \mathcal{M} , wenn klar ist, um welchen messbaren Raum es sich handelt.

Fur einige maßtheoretische Überlegungen ist folgende Bemerkung von Bedeutung:

Bemerkung 1.2.2. Ein lokal endliches Maß ist σ -endlich.

Beweis. Dank Bedingung (B_3) reicht die lokale Endlichkeit von Maßen auch fur die σ -Endlichkeit. \square

Die lokal endlichen Maße bieten eine natürliche Erweiterung eines Phasenraums:

Bemerkung 1.2.3. Sei $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ ein Phasenraum. Sei außerdem

$$\mathcal{B}'(X) := \{B \subseteq X \mid \text{Es gibt } A \in \mathcal{A}, \text{ so dass } B \subseteq A \text{ und } \mu(A) < \infty, \forall \mu \in \mathcal{M}(X)\}.$$

Dann ist $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}'(X))$ ebenfalls ein Phasenraum mit $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{B}'(X)$.

Beweis. Dies folgt aus den Eigenschaften von Maßen. \square

Auch das Maß, das allen messbaren Mengen den Wert 0 zuweist, ist natürlich lokal endlich. Da es spater noch vorkommt, sei es mit μ_N bezeichnet⁵.

Wir wollen nun auf intuitive Weise $\mathcal{M}(X)$ mit einer σ -Algebra versehen. Dazu brauchen wir eine Klasse von Abbildungen, die dank der lokalen Endlichkeit auf $\mathcal{M}(X)$ wohldefiniert ist:

⁵Dieses Maß wird auch oft Nullmaß genannt.

Es sei $B \in \mathcal{B}_0(X)$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \zeta_B : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ \mu &\longmapsto \mu(B). \end{aligned}$$

Wir versehen nun $\mathcal{M}(X)$ mit der σ -Algebra $\mathcal{F}(X)$, die von allen diesen Funktionen erzeugt wird, d.h.

$$\mathcal{F}(X) := \sigma(\zeta_B; B \in \mathcal{B}_0(X)). \quad (1.1)$$

Damit haben wir nun einen messbaren Raum $(\mathcal{M}(X), \mathcal{F}(X))$. Wir werden uns im folgenden Abschnitt etwas genauer mit Teilmengen dieses Raumes beschäftigen.

1.2.1. Zählmaße

Die hier behandelten Klassen von lokal endlichen Maßen, die *Zählmaße*, bilden den Kern der Theorie dieser Arbeit. Es ist hilfreich, sie sich mehr als Punktfolgen, denn als Maße vorstellen.

Definitionen 1.2.4. Sei $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Dann heißt μ *Zählmaß (auf X)* oder synonym *Punktmaß*, wenn $\mu(B) \in \mathbb{N}_0^6$ für alle $B \in \mathcal{B}_0(X)$. Gilt zusätzlich $\mu(\{x\}) \in \{0, 1\}$ für alle $x \in X$, dann heißt μ *einfaches Zähl- oder Paupunktmaß (auf X)*. Die Menge der Zählmaße auf X sei mit $\mathcal{M}^\cdot(X)$, die der einfachen Zählmaße mit $\mathcal{M}^\circ(X)$. Letztere bezeichnen wir auch einfach als *Punktkonfigurationen*⁷.

Der Vollständigkeit halber sei auch noch folgende Klasse von lokal endlichen Maßen erwähnt: Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}(X)$ heiße *diffus* oder auch *atomfrei*, wenn einzelne Punkte keine „Masse“ besitzen, d.h. $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$. Die Menge der diffusen Maße sei mit $\mathcal{M}^\circ(X)$ bezeichnet.

Auch diese Teilmengen wollen wir jeweils mit einer σ -Algebra versehen und wählen die jeweiligen Spur- σ -Algebren. So seien

$$\mathcal{F}^\cdot(X) := \mathcal{M}^\cdot(X) \cap \mathcal{F}(X)$$

$$\mathcal{F}^\circ(X) := \mathcal{M}^\circ(X) \cap \mathcal{F}(X)$$

und

$$\mathcal{F}^\circ(X) := \mathcal{M}^\circ \cap \mathcal{F}(X).$$

Da wir später noch Wahrscheinlichkeiten auf diesen messbaren Räumen betrachten wollen, ist es wichtig für uns, die Messbarkeit der Mengen $\mathcal{M}^\cdot(X)$, $\mathcal{M}^\circ(X)$ und $\mathcal{M}^\circ(X)$ bzgl. $\mathcal{F}(X)$

⁶Deswegen nennen wir in diesem Fall die Funktionen ζ_B auch Zählfunktionen, da sie die „Punkte“/„Atome“ eines Maßes in B zählen.

⁷Der Name ist so zu verstehen, dass man die Punkte mit $\mu(x) = 1$ betrachtet.

zu betrachten. So könnte eine auf $\mathcal{M}(X)$ konstruierte Wahrscheinlichkeit schon in sinnvoller Weise auf Eigenschaften bzgl. unserer Teilmengen hin überprüft werden.

Lemma 1.2.5. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ ein abzählbar separierter σ -beschränkter messbarer Raum. Dann gilt:*

(i) *Ist $\mu \in \mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$, dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $\text{supp } \mu$ von X , die lokal endlich ist, d.h. $\text{card}((\text{supp } \mu) \cap B) \leq +\infty$ für alle $B \in \mathcal{B}_0(X)$, und Zahlen $n_x \in \mathbb{N}$ indiziert durch $\text{supp } \mu$, derart dass*

$$\mu = \sum_{x \in \text{supp } \mu} n_x \delta_x. \quad (1.2)$$

Hierbei sind die δ_x , $x \in \text{supp } \mu$, die Dirac-Maße in den entsprechenden Punkten. (In dieser Situation nennen wir $\text{supp } \mu$ den Träger von μ .)

(ii) $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X) \in \mathcal{F}(X)$.

Beweis. Sei $\tilde{\mathcal{B}}_0 = \{B_1, B_2, \dots\}$ die Familie der separierenden Mengen von X . Und seien

$$N_j := \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_{B_j}(\mu) \in \mathbb{N}_0\}$$

für $j \in \mathbb{N}$. Diese N_j sind offensichtlich messbar. Ebenso ist dann

$$N := \bigcap_{j \in \mathbb{N}} N_j$$

messbar. Wir werden nun zeigen, dass $N = \mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$.

Für den weiteren Beweis brauchen wir nun noch ein paar zusätzliche Hilfskonstruktionen. Es sei für $\mu \in N$

$$D_\mu := \bigcup_{B \in \tilde{\mathcal{B}}_0, \mu(B)=0} B.$$

Da $\tilde{\mathcal{B}}_0$ abzählbar ist und jedes $B \in \tilde{\mathcal{B}}_0$ messbar ist, ist auch $D_\mu \in \mathcal{A}$ und aufgrund der Konstruktion $\mu(D_\mu) = 0$.

Sei nun weiter für ein gegebenes $x \in X$

$$C_m(x) := \bigcap_{1 \leq j \leq m, x \in B_j} B_j.$$

Wegen der Schnittstabilität von $\tilde{\mathcal{B}}_0$ ist dann auch $C_m(x) \in \tilde{\mathcal{B}}_0$. Aus der Trennungseigenschaft von $\tilde{\mathcal{B}}_0$ folgt nun, dass $C_m(x)$ mit steigendem m gegen die einpunktige Menge $\{x\}$ absteigt und damit aufgrund der Stetigkeit von μ von oben auch $\mu(C_m(x)) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mu(\{x\})$ gilt.

Sei nun $\mu \in N$ fixiert.

Für $x \in X$ gibt es $B \in \tilde{\mathcal{B}}_0$, so dass $\mu(\{x\}) = \mu(B)$ und $x \in B$. Denn: $\mu(C_m(x)) \in \mathbb{N}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Nun konvergiert $\mu(C_m(x))$ gegen $\mu(\{x\})$, d.h. insbesondere existiert $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$ gilt $|\mu(\{x\}) - \mu(C_m(x))| < 1$. Somit ist $\mu(\{x\}) = \mu(C_{m_0}(x))$ für alle $m \geq m_0$. Mit anderen Worten: $C_{m_0}(x)$ erfüllt unsere Anforderungen.

Ist $x \in D_\mu^{\mathbb{C}} := X \setminus D_\mu$, dann gilt $\mu(\{x\}) \geq 1$, denn: Angenommen $\mu(\{x\}) = 0$, dann existiert nach eben Gezeigtem ein $B \in \tilde{\mathcal{B}}_0$ mit $\mu(B) = 0$ und $x \in B$. Aber dann wäre $x \in D_\mu$.

Wir setzen nun $\text{supp } \mu := D_\mu^{\mathbb{C}}$. Nach Bemerkung 1.2.2 ist μ σ -endlich. Also gibt es eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ messbarer Mengen, so dass $A_n \uparrow X$ für $n \rightarrow +\infty$ und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist aber auch $\text{card } A_n \cap \text{supp } \mu < +\infty$:

Angenommen $A_n \cap \text{supp } \mu$ ist eine unendlich-elementige Menge. Sei dann A eine abzählbar unendliche Teilmenge davon. Somit

$$+\infty = \sum_{x \in A} \underbrace{\mu(\{x\})}_{\geq 1} = \mu(A) \leq \mu(A_n \cap \text{supp } \mu) < +\infty,$$

und es ergibt sich ein Widerspruch.

Daraus folgt dann, dass $\text{supp } \mu$ eine höchstens abzählbar unendliche Menge ist, da $\text{supp } \mu = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap \text{supp } \mu$, also abzählbare Vereinigung endlicher Mengen. Somit ist die Darstellung

$$\mu = \sum_{x \in \text{supp } \mu} \mu(\{x\}) \delta_x$$

möglich, da außerdem $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in D_\mu$. Und es ist $\mu(\{x\}) \in \mathbb{N}$ für alle $x \in D_\mu^{\mathbb{C}}$.

Nun zeigen wir die Aussage (i) des Lemmas für $\mu \in N$, d.h., dass $\text{supp } \mu$ eine lokal endliche Menge ist: Sei $B \in \mathcal{B}_0(X)$. Dann ist

$$\text{card}((\text{supp } \mu) \cap B) = \sum_{x \in \text{supp } \mu \cap B} 1 \leq \sum_{x \in \text{supp } \mu} \mu(\{x\}) \delta_x(B) = \mu(B) < +\infty,$$

da μ lokal endlich ist.

Nun müssen wir natürlich noch zeigen, dass eben $N = \tilde{\mathcal{M}}^{\cdot\cdot}(X)$ ist: Sei

$$\tilde{\mathcal{M}}^{\cdot\cdot} := \left\{ \mu \in \mathcal{M}(X) \mid \mu = \sum_{x \in C} n_x \delta_x, C \subseteq X \text{ lokal endlich}, n_x \in \mathbb{N} \forall x \in C \right\}.$$

Wir haben bisher $N \subseteq \tilde{\mathcal{M}}^{\cdot\cdot}$ gezeigt. Andererseits ist $\tilde{\mathcal{M}}^{\cdot\cdot} \subseteq \mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$, denn für $B \in \mathcal{B}_0(X)$ und $\mu = \sum_{x \in C} n_x \delta_x \in \tilde{\mathcal{M}}^{\cdot\cdot}$ gilt

$$\mu(B) = \sum_{x \in C \cap B} n_x \in \mathbb{N}_0.$$

Ebenso gilt $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X) \subset N$, denn aus $\mu \in \mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$ folgt auch direkt nach Definition, dass $\zeta_B(\mu) \in \mathbb{N}_0$ für alle $B \in \tilde{\mathcal{B}}_0$. Somit ist $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X) = N \in \mathcal{F}(X)$. \square

Natürlich haben wir damit auch direkt eine Darstellung der einfachen Zählmaße:

Korollar 1.2.6. *Ist $\mu \in \mathcal{M}^{\cdot}(X)$, dann besitzt es eine Darstellung der Form*

$$\mu = \sum_{x \in \text{supp } \mu} \delta_x,$$

wobei $\text{supp } \mu$ eine eindeutig bestimmte lokal endliche Teilmenge von X ist.

Beweis. Dass sich μ in dieser Art darstellen lässt, erhalten wir direkt aus dem Beweis von Lemma 1.2.5. Die Eindeutigkeit ist direkt ersichtlich, wenn man sich klarmacht, dass μ eindeutig durch seine Werte auf den Mengen $\{x\}$ festgelegt ist. \square

Dieses Korollar gibt uns eine Rechtfertigung für eine Schreibweise, die wir im Folgenden benutzen werden: Wir identifizieren ein (einfaches oder nicht einfaches) Punktmaß μ direkt mit seinem Träger $\text{supp } \mu$. Diese Identifikation zwischen einer lokalendlichen Menge und Punktmaßen ist in beide Richtungen messbar und im Falle einfacher Punktmaße sogar bijektiv, vergleiche [KMM74], S. 2. In diesem Sinne soll von nun an „ $x \in \mu$ “ bedeuten, dass $x \in \text{supp } \mu$ ist. Ebenso erklären sich natürlich dann auch $\mu \subseteq A$ und $A \subseteq \mu$ für eine Menge $A \subseteq X$. Unsere Vorstellung von Punktmaßen als Punktfolgen findet damit auch insofern eine Rechtfertigung, als der Träger wie oben gezeigt eine abzählbare⁸ Teilmenge von X ist.

Die Messbarkeit der Mengen $\mathcal{M}^{\cdot}(X)$, $\mathcal{M}^{\circ}(X)$ bezüglich der σ -Algebra \mathcal{F} benötigt noch etwas Vorbereitung. Dazu halten wir zunächst fest, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathcal{M}(X \times X), \\ (\mu, \nu) &\longmapsto \mu \otimes \nu \end{aligned}$$

messbar ist (siehe Lemma A.1.3 im Anhang). Ebenso ist die Diagonale $D := \{(x, x) \mid x \in X\}$ eine messbare Menge (siehe Bemerkung A.2.1 im Anhang). Der Einfachheit halber sei $\mu \otimes \mu$ mit μ^2 bezeichnet.

Lemma 1.2.7. (Krickeberg) *Wenn $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ist, dann gilt für $A, B \in \mathcal{A}$*

$$\mu^2(D \cap (A \times B)) = \sum_{x \in A \cap B, \mu(\{x\}) > 0} \mu(\{x\})^2. \quad (1.3)$$

Wenn $A, B \in \mathcal{B}_0$, dann ist diese Summe sogar endlich.

⁸Nach [KMM74], S. 109, lässt sich dieses „Abzählen“ in bestimmten Fällen von Phasenräumen sogar messbar durchführen.

Beweis. Sei $C := D \cap (A \times B) = \{(x, x) \mid x \in A \cap B\}$.

Nun ist

$$1_C(x, y) = \begin{cases} 1_{\{y\}}(x), & \text{wenn } y \in A \cap B \\ 0, & \text{wenn } y \notin A \cap B. \end{cases} \quad (1.4)$$

Und nach dem Satz von Tonelli (siehe z.B. [Bau92], Satz 23.6 auf S. 157) gilt

$$\begin{aligned} \mu^2(C) &= \int_X \int_X 1_C(x, y) \mu(dx) \mu(dy) \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \int_X 1_{A \cap B}(y) \int_X 1_{\{y\}}(x) \mu(dx) \mu(dy) \\ &= \int_X 1_{A \cap B}(y) \mu(\{y\}) \mu(dy) \end{aligned}$$

Um nun $\mu^2(C)$ als Summe darstellen zu können, brauchen wir noch, dass die Menge $M := \{y \in X \mid \mu(\{y\}) > 0\}$ eine höchstens abzählbar unendliche Menge ist. (Insbesondere ist die Menge dann messbar als abzählbare Vereinigung von messbaren Mengen des Typs $\{y\}$, $y \in X$.) Der Beweis ähnelt dem des Lemmas 1.2.5. Wir übernehmen daher auch die Definitionen von D_μ und $C_m(x)$ und führen zusätzlich noch folgende D_μ approximierende Menge ein:

$$D_\mu(\varepsilon) := \bigcup_{B \in \tilde{\mathcal{B}}_0, \mu(B) < \varepsilon} B.$$

Dann ist $D_\mu(\varepsilon) \in \mathcal{A}$ und aus $x \notin D_\mu(\varepsilon)$ folgt, dass $\mu(\{x\}) \geq \varepsilon$, da man jede Menge $\{x\}$ durch die $C_m(x) \in \tilde{\mathcal{B}}_0$ approximieren kann. Aus der lokalen Endlichkeit von μ folgt dann wieder, dass $D_\mu(\varepsilon)^\complement$ höchstens abzählbar ist für jedes $\varepsilon > 0$. Nun ist $D_\mu^\complement = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_\mu(\frac{1}{n})^\complement$, also ebenfalls abzählbar. Offensichtlich ist $D_\mu^\complement \subseteq M$. Andererseits ist $M \subseteq D_\mu^\complement$, denn $\mu(\{x\}) > 0$ impliziert, dass $x \in D_\mu(\mu(\{x\})/2)^\complement$, da man $\{x\}$ durch die $C_m(x)$ approximieren kann.

Mit der Abzählbarkeit von M wissen wir nun, dass

$$\mu^2(C) = \sum_{y \in A \cap B \cap M} (\mu(\{y\}))^2 =: \Sigma.$$

Sind nun $A, B \in \mathcal{B}_0(X)$, dann ist diese Summe endlich, da in diesem Fall $\mu(A \cap B) \leq +\infty$:
Seien

$$\Sigma_+ := \sum_{y \in A \cap B \cap M \cap \{y \in X \mid \mu(\{y\}) \geq 1\}} (\mu(\{y\}))^2$$

und

$$\Sigma_- := \sum_{y \in A \cap B \cap M \cap \{y \in X \mid \mu(\{y\}) < 1\}} \overbrace{(\mu(\{y\}))^2}^{< \mu(\{y\})}.$$

Dann ist

$$\Sigma = \Sigma_+ + \Sigma_- .$$

Nun ist trivialerweise $\Sigma_- \leq \mu(A \cap B) < +\infty$. Und Σ_+ kann nur endlich viele Summanden haben, da sonst ebenfalls $\mu(A \cap B) = +\infty$, also gilt auch $\Sigma_+ < +\infty$. Somit kann auch Σ nur endlich sein. \square

Die Tragweite dieses Lemmas von Krickeberg wird an den nächsten beiden Korollaren deutlich. Sie liefern Charakterisierungen der Punktmaße und der diffusen Maße, basierend auf eben dieser Eigenschaft lokal endlicher Maße, die das Lemma beschreibt.

Korollar 1.2.8. Sei $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Dann gilt

$$\mu \in \mathcal{M}^\circ(X) \iff 1_D \cdot \mu^2 = 0 .$$

D.h. ein lokal endliches Maß ist genau dann diffus, wenn das Maß auf $X \times X$, das durch μ^2 versehen mit der Indikatorfunktion auf der Diagonalen als Dichte gegeben ist, das Nullmaß ist.

Beweis. Sei $\mu \in \mathcal{M}^\circ(X)$. Dann gilt für Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ direkt nach Lemma 1.2.7, dass

$$1_D \cdot \mu^2(A \times B) = \mu^2(D \cap A \times B) = \sum_{x \in A \cap B, \mu(\{x\}) > 0} \overbrace{\mu(\{x\})^2}^{=0, \text{ da } \mu \text{ diffus}} = 0 .$$

Da die Mengen vom Typ $A \times B$ die Produkt- σ -Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ erzeugen, und die Werte auf ihnen ein Maß festlegen, gilt $1_D \cdot \mu^2 = 0$.

Gilt andererseits $1_D \cdot \mu^2 = 0$, dann haben wir für jedes $x \in X$

$$0 = 1_D \cdot \mu^2(\{x\} \times \{x\}) = \mu(\{x\})^2 .$$

Dann muss aber auch gelten, dass $\mu(\{x\}) = 0$. \square

Auf dem Weg zur Beschreibung der einfachen Punktmaße brauchen wir noch eine Eigenschaft der Punktmaße im Allgemeinen, die aus Krickebergs Lemma folgt.

Korollar 1.2.9. Sei $\chi : X \rightarrow D$, $x \mapsto (x, x)$, und sei $\mu \in \mathcal{M}^\circ(X)$. Dann gilt

$$1_D \cdot \mu^2 \geq \mu \circ \chi^{-1} .$$

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass die Abbildung χ offensichtlich bijektiv ist. Ebenso ist sie selbst, wie ihre Umkehrung messbar. Und damit ist das Bildmaß $\mu \circ \chi^{-1}$ definiert.

Ist nun $\mu \in \mathcal{M}^{\cdot}(X)$, dann gilt für alle $x \in X$

$$\mu(\{x\})^2 \geq \mu(\{x\}). \quad (1.5)$$

Aber dann wissen wir, dass für $A, B \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} 1_D \cdot \mu^2(A \times B) &\stackrel{\text{Lemma 1.2.7}}{=} \sum_{x \in A \cap B, \mu(\{x\}) > 0} \mu(\{x\})^2 \\ &\geq \sum_{x \in A \cap B, \mu(\{x\}) > 0} \mu(\{x\}) \\ &= \mu(A \cap B) = \mu \circ \chi^{-1}(A \times B). \end{aligned}$$

Die Ungleichung für die Maße ergibt sich erneut daraus, dass die Mengen $A \times B$ die Produkt- σ -Algebra erzeugen. \square

Wir werden nun sehen, dass die Gleichheit in (1.5) genau dann gilt, wenn μ ein einfaches Punktmaß ist:

Satz 1.2.10. *Sei $\mu \in \mathcal{M}(X)$, dann gilt*

$$\mu \in \mathcal{M}^{\cdot}(X) \iff 1_D \cdot \mu^2 = \mu \circ \chi^{-1}. \quad (1.6)$$

Beweis. Ist $\mu \in \mathcal{M}^{\cdot}(X)$, dann gilt für $x \in X$, dass $\mu(\{x\})^2 = \mu(\{x\})$, da $\mu(\{x\}) \in \{0, 1\}$. Somit gilt nach Krickebergs Lemma für $A, B \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} 1_D \cdot \mu^2(A \times B) &= \sum_{x \in A \cap B, \mu(\{x\}) > 0} \mu(\{x\})^2 \\ &= \sum_{x \in A \cap B, \mu(\{x\}) > 0} \mu(\{x\}) = \mu(A \cap B) = \mu \circ \chi^{-1}(A \times B) \end{aligned}$$

Gilt nun andererseits $1_D \cdot \mu^2 = \mu \circ \chi^{-1}$, dann gilt insbesondere für $A = B = \{x\}$ nach Lemma 1.2.7

$$\mu(\{x\})^2 = 1_D \cdot \mu^2(\{x\} \times \{x\}) = \mu \circ \chi^{-1}(\{x\} \times \{x\}) = \mu(\{x\}).$$

Aber dann muss für alle $x \in X$ gelten, dass $\mu(\{x\}) \in \{0, 1\}$, also $\mu \in \mathcal{M}^{\cdot}(X)$. \square

Damit haben wir alles, was wir für die Messbarkeit der diffusen Maße und der einfachen Zählmaße brauchen.

Korollar 1.2.11. *Die Mengen $\mathcal{M}^{\cdot}(X)$ und $\mathcal{M}^{\circ}(X)$ sind Elemente der σ -Algebra $\mathcal{F}(X)$.*

Beweis. Mit Korollar 1.2.8 haben wir direkt die Darstellung

$$\mathcal{M}^\circ(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid 1_D \cdot \mu^2 = 0\}$$

und aus Satz 1.2.10 gewinnen wir die Darstellung

$$\mathcal{M}^\cdot(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid 1_D \cdot \mu^2 = \mu \circ \chi^{-1}\}.$$

Aus der Messbarkeit der Abbildungen $\mu \mapsto 1_D \cdot \mu^2$ und $\mu \mapsto \mu \circ \chi^{-1}$ folgt dann sofort die Messbarkeit der Mengen $\mathcal{M}^\cdot(X)$ und $\mathcal{M}^\circ(X)$. \square

1.3. Zufällige Maße und Punktprozesse

Die nächste Stufe in unserer Konstruktion sind nun Wahrscheinlichkeiten auf dem messbaren Raum $(\mathcal{M}(X), \mathcal{F}(X))$:

Definition 1.3.1. Eine Wahrscheinlichkeit P auf $(\mathcal{M}(X), \mathcal{F}(X))$ heiße *zufälliges Maß auf X* . Eine Wahrscheinlichkeit auf $(\mathcal{M}^\cdot(X), \mathcal{F}^\cdot(X))$ nennen wir *Punktprozess in X* . Ebenso wollen wir ein zufälliges Maß, das auf $\mathcal{M}^\cdot(X)$ konzentriert ist, so nennen. Ist nun P eine Wahrscheinlichkeit auf $(\mathcal{M}^\cdot(X), \mathcal{F}^\cdot(X))$, oder eben konzentriert auf $\mathcal{M}^\cdot(X)$, so nennen wir sie *einfachen Punktprozess in X* .

Die jeweiligen Mengen dieser Wahrscheinlichkeiten seien mit $\mathcal{PM}(X)$, $\mathcal{PM}^\cdot(X)$ und $\mathcal{PM}^\circ(X)$ bezeichnet.

Eine wichtige Groe für diese ist die folgende:

Definition 1.3.2. Es sei $P \in \mathcal{PM}(X)$. Dann definiert

$$\begin{aligned} \nu_P : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ A &\longmapsto \int_{\mathcal{M}(X)} \zeta_A(\mu) P(d\mu) \end{aligned}$$

ein Maß auf $(X, \mathcal{A})^9$, genannt das *Intensitätsmaß von P* oder einfach die *Intensität von P* . In anderem Kontext wird dieses Maß auch das *erste Momentenma von P* genannt. Hier ist wieder $\zeta_A : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $\mu \mapsto \mu(A)$, die zu A gehörende Zählfunktion.

Ist $P \in \mathcal{PM}(X)$ derart, dass ν_P wieder lokal endlich ist, so nennen wir P ein *Maß von erster Ordnung*.

Zur Bedeutung dieses Maßes: Ist z.B. P ein einfacher Punktprozess, so gibt das zugehörige Intensitätsmaß die zu erwartende Anzahl von Punkten in dieser Menge an.

⁹Die Eigenschaften eines Maßes lassen sich leicht durch die Linearität des Integrals und den Eigenschaften der ζ_A zeigen.

1.3.1. Stationäre zufällige Maße

Invarianz-Eigenschaften von Maßen sind für diverse mathematische Gebiete von großem Interesse. So ist das Lebesgue-Maß z.B. als Haarsches Maß bzgl. der Gruppe $(\mathbb{R}^d, +)$ invariant unter räumlichen Translationen (vergleiche [Bau92], S. 44). Eine solche Translations-Invarianz kann man auch für zufällige Maße formulieren. Dazu sei $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ ein Phasenraum und $(X, +)$ eine abelsche Gruppe. Weiter seien die Abbildungen $T_x : X \rightarrow X, y \mapsto y + x$ für alle $x \in X$ messbar.

Sei nun $A \subseteq X$ und $x \in X$. Dann bezeichne

$$A + x := \{a + x \mid a \in A\}$$

die um x verschobene Menge A .

Definition 1.3.3. Wir nennen $\mu \in \mathcal{M}(X)$ *translations-invariant*, wenn $T_x\mu = \mu$ für alle $x \in X$.

Es ist $T_x\mu(A) = \mu(\{a - x \mid a \in A\})$ für $A \in \mathcal{A}$, also insbesondere für $\mu \in \mathcal{M}^{\cdot\cdot}$, $\mu = \sum_{y \in \text{supp } \mu} n_y \delta_y$ ist

$$T_x\mu = \sum_{y \in \text{supp } \mu} n_y \delta_{y-x}.$$

Wir schreiben deswegen intuitiv $T_x\mu =: \mu - x$. Die Abbildung T_x induziert damit offensichtlich eine Abbildung $T_x : \mathcal{M}(E) \rightarrow \mathcal{M}(E), \mu \mapsto \mu - x$. Die Messbarkeit folgt mit einfachen Überlegungen aus der Messbarkeit der Translationen in X .

Damit können wir nun den Begriff der Translations-Invarianz auf zufällige Maße ausdehnen:

Definition 1.3.4. Ein zufälliges Maß $P \in \mathcal{P}\mathcal{M}(X)$ heißt *translations-invariant* oder *stationär*, wenn das Bild von P unter den Abbildungen $T_x, x \in X$ wieder P selbst ist, also $T_x P = P$ für alle $x \in X$. Die Mengen der stationären zufälligen Maße, Punktprozesse, einfachen Punktprozesse seien mit $\mathcal{P}_0\mathcal{M}(X), \mathcal{P}_0\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$ bzw. $\mathcal{P}_0\mathcal{M}^{\cdot}(X)$ bezeichnet.

Wir werden in Abschnitt 1.3.3 Beispiele für stationäre Punktprozesse kennenlernen.

1.3.2. Die Methode des Campbell-Maßes

In diesem Abschnitt werden wir uns mit einer wichtigen Methode zur Analyse von zufälligen Maßen beschäftigen. Diese basiert auf der folgenden Konstruktion:

Definition 1.3.5. Es sei $P \in \mathcal{P}\mathcal{M}(X)$. Wir definieren das so genannte *Campbell-Maß* zu P auf $(X \times \mathcal{M}(X), \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}(X))$ vermöge des folgenden Funktionals auf den positiven messbaren

Funktionen auf $X \times \mathcal{M}(X)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_P : \mathcal{F}_+(X \times \mathcal{M}(X)) &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ h &\longmapsto \int_{\mathcal{M}(X)} \int_X h(x, \mu) \mu(dx) P(d\mu). \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, da die Abbildung $\mu \mapsto \int_X h(x, \mu) \mu(dx)$ für alle $h \in \mathcal{F}_+(X \times \mathcal{M}(X))$ messbar ist (siehe A.1.5).

Ist nun P ein Prozess erster Ordnung, dann lässt dieser sich eindeutig mit seinem Campbell-Maß identifizieren. Dazu brauchen wir noch eine kleine Vorüberlegung:

Bemerkung 1.3.6. Ist $P \in \mathcal{PM}(X)$ von erster Ordnung, dann ist für $B \in \mathcal{B}_0(X)$

$$\nu_P(B) = \mathcal{C}_P(B \times \mathcal{M}(X)).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_P(B \times \mathcal{M}(X)) &= \int_{\mathcal{M}(X)} \int_X 1_B(x) 1_{\mathcal{M}(X)}(\mu) \mu(dx) P(d\mu) \\ &= \int_{\mathcal{M}(X)} \mu(B) P(d\mu) = \int_{\mathcal{M}(X)} \zeta_B(\mu) P(d\mu) \\ &= \nu_P(B). \end{aligned}$$

□

Die angekündigte Methode basiert auf dem folgenden Satz:

Satz 1.3.7. *Ein zufälliges Maß $P \in \mathcal{PM}(X)$ ist durch sein Campbell-Maß \mathcal{C}_P eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei zunächst $B \in \mathcal{B}_0$ und $f \in \mathcal{F}_+(\mathcal{M}(X))$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_P(1_B \otimes f) &= \int_{\mathcal{M}(X)} \mu(B) f(\mu) P(d\mu) \\ &= \int_{\mathcal{M}(X)} \zeta_B(\mu) f(\mu) P(d\mu). \end{aligned} \tag{1.7}$$

\mathcal{C}_P bestimmt nun P auf allen Ereignissen des Typs $\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_B(\mu) > 0\} \cap F$, wobei

$B \in \mathcal{B}_0$ und $F \in \mathcal{F}(X)$:

$$\begin{aligned}
 & P(\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_B(\mu) > 0\} \cap F) \\
 &= \int_{\mathcal{M}(X)} 1_{\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_B(\mu) > 0\} \cap F}(\mu) P(d\mu) \\
 &\stackrel{\text{Integration nur über}}{\underset{\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_B(\mu) > 0\}}{=}}{\int_{\mathcal{M}(X)} \frac{\zeta_B(\mu)}{\zeta_B(\mu)} 1_{\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_B(\mu) > 0\} \cap F}(\mu) P(d\mu)} \\
 &\stackrel{(1.7)}{=} \mathcal{C}_P \left(1_B \otimes \frac{1}{\zeta_B} 1_{\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_B(\mu) > 0\} \cap F} \right).
 \end{aligned}$$

Für $F = \mathcal{M}(X)$ erhalten wir so die Werte $P(\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_B(\mu) > 0\})$. Ebenso finden wir anhand einer Lokalisierung $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ den Wert

$$P(\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_X(\mu) > 0\}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} P(\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_{B_n}(\mu) > 0\}).$$

Nun ist aber

$$\mathcal{M}(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_X(\mu) > 0\} \dot{\cup} \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_X(\mu) = 0\}$$

und damit gilt

$$P_N := P(\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_X(\mu) = 0\}) = 1 - P(\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_X(\mu) > 0\}).$$

Aber es ist $\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_X(\mu) = 0\} = \{\mu_N\}$, d.h. die Menge besteht nur aus dem Nullmaß. Somit gilt für eine beliebige Menge $F \in \mathcal{F}(X)$, dass

$$P(F) = \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_P \left(1_{B_n} \otimes \frac{1}{\zeta_{B_n}} 1_{\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_{B_n}(\mu) > 0\} \cap F} \right) + P_N, & \text{wenn } \mu_N \in F, \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_P \left(1_{B_n} \otimes \frac{1}{\zeta_{B_n}} 1_{\{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_{B_n}(\mu) > 0\} \cap F} \right), & \text{wenn } \mu_N \notin F. \end{cases}$$

□

In vielen Situationen ist es viel einfacher bei zwei zufälligen Maßen deren Campbell-Maße zu vergleichen, um eine vermeintliche Gleichheit zu überprüfen. Besonders gut gelingt dies beim Poissonschen Punktprozess, der Gegenstand des nächsten Abschnittes ist.

1.3.3. Der Poissonsche Punktprozess

Wir kommen nun zu der Klasse der zufälligen Maße, bzw. Punktprozesse, denen vielleicht die größte Bedeutung in der Mathematik wie auch den Anwendungen zugemessen werden kann: den *Poissonschen Punktprozessen*. So lassen sich damit Gase zu fixen Zeitpunkten

beschreiben (siehe z.B. [Hee72], S. 449) oder ankommende Telefonanrufe in einer Auskunft (siehe z.B. [Bil86]).

Unter gewissen Umständen, auf die wir später eingehen, sind diese Prozesse einfache Punktprozesse.

In Büchern wie [KMM78] werden die Konstruktionen und Beweise lediglich für den Fall eines metrischen Raumes mit abzählbarer Basis, zusammen mit den metrisch beschränkten Mengen durchgeführt. Diese Beweise bzw. Konstruktionen benutzen aber lediglich die Eigenschaften eines Phasenraums, so dass wir für die Beweise auf diese Bücher verweisen können. Diese Verallgemeinerung wird z.B. in [Zes05b] vorgenommen.

In beiden Werken wird der Poisson-Punktprozess konkret konstruiert. Wir beschränken uns auf das Zitat eines Existenz- und Eindeutigkeits-Satzes:

Satz 1.3.8. *Es sei $\rho \in \mathcal{M}(X)$. Dann gibt es genau einen Punktprozess $P_\rho \in \mathcal{PM}^{\cdot\cdot}(X)$, so dass die Zufallsvariablen ζ_B , $B \in \mathcal{B}_0(X)$ poissonisch zum Parameter $\rho(B)$ verteilt sind, d.h. für $k \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$P_\rho(\{\mu \in \mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X) \mid \zeta_B(\mu) = k\}) = \frac{\rho(B)^k}{k!} e^{-\rho(B)},$$

und für paarweise disjunkte Mengen $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}_0(X)$ sind die zugehörigen Zufallsvariablen $\zeta_{B_1}, \zeta_{B_2}, \dots$ unabhängig bzgl. P_ρ .

Beweis. Siehe [KMM78], Proposition 1.7.1, auf Seite 57. □

Dieser Satz liefert uns folgende Definition:

Definition 1.3.9. Es sei $\rho \in \mathcal{M}(X)$. Der vermöge Satz 1.3.8 eindeutig definierte Punktprozess P_ρ heißt der *poissonsche Punktprozess mit Intensität ρ* ¹⁰.

Tatsächlich ist ρ das zugehörige Intensitätsmaß:

Bemerkung 1.3.10. Sei $\rho \in \mathcal{M}(X)$, dann ist $\nu_{P_\rho} = \rho$.

Beweis. Sei $B \in \mathcal{B}_0(X)$. Es ist

$$\begin{aligned} \nu_{P_\rho}(B) &= \int_{\mathcal{M}(X)} \zeta_B(\mu) P_\rho(d\mu) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} k \cdot P_\rho(\{\mu \in \mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X) \mid \zeta_B(\mu) = k\}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} k \cdot \frac{\rho(B)^k}{k!} e^{-\rho(B)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot \frac{\rho(B)^k}{k!} e^{-\rho(B)} \\ &= e^{-\rho(B)} \rho(B) \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\rho(B)^{(k-1)}}{(k-1)!} = e^{-\rho(B)} \rho(B) \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\rho(B)^k}{k!}}_{=e^{\rho(B)}} = \rho(B). \end{aligned}$$

¹⁰In dieser Arbeit werden wir auch oft synonym vom Poisson-Prozess reden, auch wenn in anderen Werken damit lediglich der eindimensionale Fall bezeichnet wird.

Damit ist die Aussage bewiesen. \square

Wir kommen nun zu der Bedingung dafür, dass P_ρ einfach ist:

Bemerkung 1.3.11. Sei $\rho \in \mathcal{M}(X)$. Der Poisson-Punktprozess P_ρ mit Intensität ρ ist genau dann ein einfacher Punktprozess, wenn ρ diffus ist.

Beweis. Auch hierfür sei auf [KMM78] verwiesen. Die Aussage wird dort in Proposition 1.7.6. auf Seite 58 behandelt. \square

Aber der Poisson-Punktprozess P_ρ hat weitere Interessante Eigenschaften, die sich an seinem Intensitätsmaß festmachen lassen:

Bemerkung 1.3.12. Der Poisson-Punktprozess P_ρ ist genau dann stationär, wenn seine Intensität ρ translations-invariant ist.

Beweis. Dies lässt sich einer kleinen Bemerkung auf Seite 260 von [KMM78] entnehmen. \square

In [KMM78] werden Poisson-Prozesse auf bestimmten metrischen Räumen betrachtet. Die Aussage von Bemerkung 1.3.12 ist eben in dieser allgemeinen Situation richtig.

Im speziellen Fall $X = \mathbb{R}^d$ sind bekanntlich sämtliche translations-invarianten Maße gegeben durch das Lebesgue-Maß λ versehen mit einer konstanten positiven Dichte (siehe [Bau92] Satz 8.1, S. 46). Mit anderen Worten: $P_{z\lambda}$ ist stationär für alle $z \in \mathbb{R}^+$.

Wir werden nun das Campbell-Maß eines Poisson-Punktprozesses angeben. Die Berechnung geht zurück auf Joseph Mecke (siehe [Mec67]), weswegen wir sie als *Mecke-Formel* bezeichnen wollen:

Satz 1.3.13. (Mecke-Formel) *Es sei $\rho \in \mathcal{M}(X)$. Dann gibt es genau einen Punktprozess $P \in \mathcal{PM}$, so dass für alle $h \in \mathcal{F}_+(X \times \mathcal{M}(X))$ sich das Campbell-Maß wie folgt berechnet:*

$$\mathcal{C}_P(h) = \int_{\mathcal{M}^{\cdot}(X)} \int_X h(x, \mu + \delta_x) \rho(dx) P(d\mu).$$

Dieser Punktprozess ist der Poisson-Prozess mit Intensität ρ , also P_ρ .

Beweis. Dies folgt aus der Aussage und dem Beweis von Satz 3.1, S. 31, aus [Mec67]. \square

Das Campbell-Maß bestimmt nach Satz 1.3.7 einen Punktprozess eindeutig. Die Mecke-Formel wird uns deshalb helfen einen Poisson-Prozess auch als solchen zu identifizieren. Das werden wir nun direkt benutzen: Wir werden nämlich nun sehen, dass gewisse Bilder von Poisson-Prozessen ebenfalls wieder poissonische Punktprozesse sind. Wir brauchen noch eine kleine Vorbereitung:

Lemma 1.3.14. *Es seien $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ und $(X', \mathcal{A}', \mathcal{B}(X'))$ zwei Phasenräume und $\chi : X \rightarrow X'$ eine messbare Abbildung, so dass $\chi^{-1}(B') \in \mathcal{B}_0(X)$ für alle $B' \in \mathcal{B}_0(X')$. Dann induziert χ eine messbare Abbildung*

$$\begin{aligned} T_\chi : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathcal{M}(X'), \\ \mu &\longmapsto \chi\mu = \mu \circ \chi^{-1}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass T_χ wohldefiniert, also $T_\chi(\mu) \in \mathcal{M}(X')$ ist. Als Bildmaß ist es sicher ein Maß. Zu zeigen bleibt also die lokale Endlichkeit von $\chi\mu$: Es ist für $B' \in \mathcal{B}_0(X')$

$$\chi\mu(B') = \mu \circ \chi^{-1}(B') = \mu(\chi^{-1}(B')) < +\infty,$$

da μ lokal endlich ist und nach Voraussetzung $\chi^{-1}(B') \in \mathcal{B}_0(X)$.

Zur Messbarkeit der Abbildung: Es reicht nach Satz A.1.2 (S. 97 im Anhang) zu zeigen, dass die Funktionen

$$\mu \longmapsto \zeta_{B'} \circ T_\chi(\mu), \quad B' \in \mathcal{B}_0(X'),$$

messbar sind. Aber es ist

$$\zeta_{B'} \circ T_\chi(\mu) = \mu(\chi^{-1}(B')) = \zeta_{\chi^{-1}(B')}(\mu),$$

also messbar, wieder da $\chi^{-1}(B') \in \mathcal{B}_0(X)$ und da die Zählfunktionen ζ_B , $B \in \mathcal{B}_0(X)$, per Definition messbar sind. \square

Sofort ersichtlich ist Folgendes:

Korollar 1.3.15. *Ist $P \in \mathcal{P}\mathcal{M}(X)$ und T_χ wie in Lemma 1.3.14, dann ist $T_\chi P \in \mathcal{P}\mathcal{M}(X')$.*

Viel interessanter ist, was eine solche Abbildung mit einem Poisson-Punktprozess macht:

Satz 1.3.16. *Es seien $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ und $(X', \mathcal{A}', \mathcal{B}(X'))$ zwei Phasenräume und $\chi : X \rightarrow X'$ eine messbare Abbildung, so dass $\chi^{-1}(B') \in \mathcal{B}_0(X)$ für alle $B' \in \mathcal{B}_0(X')$. Weiter sei*

$$\begin{aligned} T_\chi : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathcal{M}(X'), \\ \mu &\longmapsto \chi\mu = \mu \circ \chi^{-1}. \end{aligned}$$

Außerdem sei $\rho \in \mathcal{M}(X)$.

Dann ist $T_\chi P_\rho = P_{\chi\rho}$, d.h. das Bild eines Poisson-Prozesses unter T_χ ist wieder ein Poisson-Prozess.

1. Zufällige Maße

Beweis. Wir berechnen das Campbell-Maß für $Q := T_\chi P_\rho$: Dazu bemerken wir zunächst, dass für $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $x \in X$ und $A' \in \mathcal{A}'$

$$\begin{aligned} \chi(\mu + \delta_x)(A') &= (\mu + \delta_x)(\chi^{-1}(A')) \\ &= \mu(\chi^{-1}(A')) + \delta_x(\chi^{-1}(A')) \\ &= \chi\mu(A') + \delta_{\chi(x)}(A'). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Sei nun $h \in \mathcal{F}_+(X' \times \mathcal{M}(X'))$, dann

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_Q(h) \\ &= \int_{\mathcal{M}(X')} \int_{X'} h(x', \nu) \nu(dx') Q(d\nu) \\ &\stackrel{\text{Transformationssatz}}{=} \int_{\mathcal{M}(X)} \int_{X'} h(x', T_\chi \mu) T_\chi \mu(dx') P_\rho(d\mu) \\ &\stackrel{\text{Transformationssatz}}{=} \int_{\mathcal{M}(X)} \int_X h(\chi(x), \chi\mu) \mu(dx) P_\rho(d\mu) \\ &\stackrel{\text{Mecke-Formel}}{=} \int_{\mathcal{M}(X)} \int_X h(\chi(x), \chi(\mu + \delta_x)) \rho(dx) P_\rho(d\mu) \\ &\stackrel{(1.8)}{=} \int_{\mathcal{M}(X)} \int_X h(\chi(x), \chi\mu + \delta_{\chi(x)}) \rho(dx) P_\rho(d\mu) \\ &\stackrel{\text{Transformationssatz}}{=} \int_{\mathcal{M}(X)} \int_{X'} h(x', \chi\mu + \delta_{x'}) \chi\rho(dx') P_\rho(d\mu) \\ &= \int_{\mathcal{M}(X)} \int_{X'} h(x', T_\chi(\mu) + \delta_{x'}) \chi\rho(dx') P_\rho(d\mu) \\ &\stackrel{\text{Transformationssatz}}{=} \int_{\mathcal{M}(X')} \int_{X'} h(x', \nu + \delta_{x'}) \chi\rho(dx') T_\chi P_\rho(d\nu) \\ &= \int_{\mathcal{M}(X')} \int_{X'} h(x', \nu + \delta_{x'}) \chi\rho(dx') Q(d\nu). \end{aligned}$$

Das heißt, Q erfüllt die Mecke-Formel für die Intensität $\chi\rho$. Nach Satz 1.3.7 gilt damit $Q = P_{\chi\rho}$. \square

Wir benötigen lediglich einen Spezialfall dieser Aussage.

Korollar 1.3.17. *Es seien $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ und $(Y, \mathcal{B}, \mathcal{B}(Y))$ zwei Phasenräume. Weiter sei $Z = X \times Y$ und $(Z, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{B}(Z))$ ein Phasenraum, so dass $A \times Y \in \mathcal{B}(Z)$ für alle beschränkten $A \subset X$. Es bezeichne π die Projektion von Z in X und sei*

$$\begin{aligned} T_\pi : \mathcal{M}(Z) &\longrightarrow \mathcal{M}(X) \\ \mu &\longmapsto \pi\mu. \end{aligned}$$

Dann ist T_π wohldefiniert. Sind $\rho \in \mathcal{M}(X)$, $\tau \in \mathcal{M}(Y)$, $\tau(Y) < +\infty$, derart, dass $\rho \otimes \tau \in \mathcal{M}(Z)$, dann gilt $T_\pi P_{\rho \otimes \tau} = P_{\tau(Y) \cdot \rho}$.

Beweis. Da wir in Z die Produkt- σ -Algebra voraussetzen und die Projektion damit messbar ist, müssen wir dank Lemma 1.3.14 und Satz 1.3.16 lediglich überprüfen, ob

(i) $\pi^{-1}(A) \in \mathcal{B}_0(Z)$ für alle $A \in \mathcal{B}_0(X)$ und

(ii) $\pi(\rho \times \tau) = \tau(Y) \cdot \rho$ ist.

Aber es ist $\pi^{-1}(A) = A \times Y$ für $A \in \mathcal{B}_0(X)$, also messbar, wegen der Messbarkeit der Projektion und beschränkt nach der Voraussetzung an $\mathcal{B}(Z)$. Damit gilt (i).

Zu (ii): Sei $h \in \mathcal{F}_+(X)$, dann ist

$$\begin{aligned}
 & \pi(\rho \otimes \tau)(h) \\
 = & \int_X h(x) \pi(\rho \times \tau)(dx) \\
 \stackrel{\text{Transformationssatz}}{=} & \int_Z h(\pi(z)) \rho \otimes \tau(dz) \\
 \stackrel{\text{Tonelli}}{=} & \int_X \int_Y h(\pi(x, y)) \tau(dy) \rho(dx) \\
 = & \int_Y \tau(dy) \int_X h(x) \rho(dx) \\
 = & \tau(Y) \cdot \rho(h).
 \end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage des Korollars. □

Für welche ρ und τ in der Situation des Korollars das Produktmaß $\rho \otimes \tau$ ein lokal-endliches ist, hängt stark von der Wahl der beschränkten Mengen von Z ab. In Kapitel 4 werden wir sowohl ein Beispiel für weitere Klassen beschränkter Mengen als auch passender Intensitäten kennenlernen.

Wir werden im Laufe der Arbeit auch noch einige weitere Eigenschaften bestimmter poissonischer Prozesse kennenlernen.

Zunächst kommen wir jedoch zu dem Grundraum, in dem die Elemente unserer späteren Mosaik liegen.

1.4. Endliche Punktfigurationen als Phasenraum

Unser Begriff eines Mosaiks wird darauf basieren, dass wir Vielecke, so genannte konvexe Polytope (siehe Abschnitt 3.1) passend aneinander heften. Diese Polytope beschreiben wir

durch deren endlich vielen Eckpunkte. Eine solche Konfiguration von Eckpunkten betrachten wir als Element der endlichen einfachen Zählmaße $\mathcal{M}_f(X)$.

Zunächst bemerken wir, dass die Mengen

$$\mathcal{M}_k(X) := \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \mu(X) = k\} = \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_X(\mu) = k\}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

Elemente von $\mathcal{F}(X)$ sind und damit ebenfalls

$$\mathcal{M}_f(X) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{M}_k(X).$$

Als σ -Algebren $\mathcal{F}_f(X)$ bzw. $\mathcal{F}_k(X)$ seien die Spuren von $\mathcal{F}(X)$ in $\mathcal{M}_f(X)$ bzw. $\mathcal{M}_k(X)$ gewählt. Was wir nun noch brauchen ist das System der beschränkten Mengen. Bevor wir dies einwandfrei formulieren können, brauchen wir noch ein paar Vorbereitungen.

Definition 1.4.1. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ ein σ -beschränkter messbarer Raum. Eine Folge beschränkter Mengen $\mathcal{P} = (B_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $B_i \in \mathcal{B}_0(X)$ für $i \in I$, heißt *Partition von X* , wenn die Mengen B_i , $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = X$ gilt.

So ist z.B. die Folge $([k, k+1))_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Partition von $X = \mathbb{R}$. Eine Verfeinerung dieses Begriffs im wahrsten Sinne des Wortes ist die folgende:

Definition 1.4.2. Nun sei X zusätzlich ein metrischer Raum und die zugehörige σ -Algebra \mathcal{A} sei die Borel- σ -Algebra bzgl. der von der Metrik induzierten Topologie. Eine Folge von Partitionen $\mathcal{P}_n = (\Lambda_{ni})_{i \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, von E heiße *verfeinernd*, wenn

- (i) sich jedes $\Lambda_{ni} \in \mathcal{P}_n$ in Mengen aus \mathcal{P}_{n+1} zerlegen lässt, d.h. es gibt $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, so dass $\Lambda_{ni} = \bigcup_{l=1}^k \Lambda_{(n+1)i_k}$.
- (ii) Und es gilt $\text{diam } \Lambda_{ni} \leq \frac{1}{n}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Eine verfeinernde Folge von Partitionen von \mathbb{R} wäre z.B. gegeben durch $\Lambda_{ni} = [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n})$, $i \in \mathbb{Z}$. Allgemein lässt sich feststellen:

Bemerkung 1.4.3. Ist X wie in Definition 1.4.2 und zusätzlich separabel, dann existiert eine verfeinernde Folge von Partitionen.

Beweis. Siehe [Arv76], Seite 66. □

Wir werden hier lediglich den Fall $X = E \subseteq \mathbb{R}^d$ betrachten, da in diesem Fall all die oben genannten Voraussetzungen gelten. Wir können nun die σ -Algebra $\mathcal{F}_f(E)$ etwas genauer beschreiben.

Bemerkung 1.4.4. Die Mengen

$$\mathcal{F}_A := \{x \in \mathcal{M}_f(E) \mid x(A) > 0\}, \quad A \in \mathcal{A}$$

und

$$\mathcal{F}^A := \{x \in \mathcal{M}_f(E) \mid x(A) = 0\} \quad A \in \mathcal{A}$$

sind in der σ -Algebra $\mathcal{F}_f(E)$; und es gilt sogar $\mathcal{F}_f(E) = \sigma(\mathcal{F}_A, A \in \mathcal{A})$.

Beweis. Es gilt

$$\mathcal{F}_A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathcal{M}_f(E) \mid \zeta_A(x) = k\} \in \mathcal{F}_f(E)$$

und $\mathcal{F}^A = \mathcal{F}_A^c$ also ebenfalls in $\mathcal{F}_f(E)$.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Mengen \mathcal{F}_A die σ -Algebra $\mathcal{F}_f(E)$ erzeugen. Dazu reicht es aber, dass wir jedes Ereignis der Form $\{x \in \mathcal{M}_f(E) \mid \zeta_B(x) = k\}$, $B \in \mathcal{B}_0(E)$, $k \in \mathbb{N}_0$ in geeigneter Weise durch die \mathcal{F}_A darstellen können. Dazu sei nun $\mathcal{P}_n = (\Lambda_{ni})_{i \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ eine verfeinernde Folge von Partitionen von E . Eine solche existiert nach Bemerkung 1.4.3. Es gilt dann für $k \in \mathbb{N}$

$$\{x \in \mathcal{M}_f(E) \mid \zeta_B(x) = k\} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \bigcup_{J \subset \mathbb{N}, \text{card } J = k} \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_{B \cap \Lambda_{nj}} \cap \mathcal{F}^{\bigcup_{i \notin J} B \cap \Lambda_{ni}}$$

und für $k = 0$ ist $\{x \in \mathcal{M}_f(E) \mid \zeta_B(x) = 0\} = \mathcal{F}^B$. □

Die Symbole \mathcal{F}_A und \mathcal{F}^A sind in Analogie zur Bildung der so genannten *Matheron-Topologie* $\mathcal{T}_{\mathcal{A}(E)}$ (siehe [Mat75]) gebildet. Dies ist eine Topologie auf der Menge $\mathcal{A}(E)$ der abgeschlossenen Mengen eines lokal kompakten separablen topologischen Raumes E . In diesem Fall sind

$$\mathcal{F}_B := \{A \in \mathcal{A} \mid B \cap A \neq \emptyset\}$$

und

$$\mathcal{F}^B := \{A \in \mathcal{A} \mid B \cap A = \emptyset\},$$

für ein $B \subseteq E$. Die Mengen $\mathcal{F}_{O_1 \cap \dots \cap O_n} \cap \mathcal{F}^K$ mit O_1, \dots, O_n offen und K kompakt bilden dann eine Basis für die Matheron-Topologie. Z.B. in [SW00] (ab Seite 34) wird dann die dazu zugehörige Borel- σ -Algebra $\sigma_{\mathcal{A}(E)}$ betrachtet. Identifiziert man $x \in \mathcal{M}_f(E)$ mit seinem Träger $\text{supp } x \subseteq E$, so entsprechen sich die Definitionen, sobald man die Spur in den endlichen Teilmengen betrachtet. Dies garantiert, dass wir einige Messbarkeitsfragen durch Zitate aus [SW00] und [Mat75] klären können¹¹.

¹¹In [Mat75] wird zwar meist Stetigkeit behandelt, aber diese impliziert dann unsere gesuchte Messbarkeit.

1. Zufällige Maße

Anhand der Mengen $\mathcal{F}_A \in \mathcal{F}_f(E)$ definieren wir nun die beschränkten Mengen $\mathcal{B}(\mathcal{M}_f(E))$: Für eine Teilmenge A von $\mathcal{M}_f(E)$ gilt

$$A \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_f(E)) \quad :\iff \quad A \subseteq \mathcal{F}_B, \text{ für mindestens ein } B \in \mathcal{B}_0(E).$$

Lemma 1.4.5. *Ist $\mathcal{B}(\mathcal{M}_f(E))$ wie oben definiert, dann ist $(\mathcal{M}_f(E), \mathcal{F}_f(E), \mathcal{B}(\mathcal{M}_f(E)))$ ein abzählbar separierter, σ -beschränkter messbarer Raum.*

Beweis. Zunächst müssen wir prüfen, ob die einelementigen Mengen $\{x\}$, $x \in \mathcal{M}_f(E)$, in $\mathcal{F}_f(E)$ sind. Aber das ist klar, denn

$$\{x\} = \bigcap_{e \in \text{supp } x} \mathcal{F}_{\{e\}} \cap \mathcal{F}^{((\text{supp } x)^c)}.$$

Zur Eigenschaft (B_1) : Sei $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_f(E))$ und $C \subseteq B$. Dann gibt es $A \in \mathcal{B}_0(E)$ mit $B \subseteq \mathcal{F}_A$. Aber dann ist auch $C \subseteq \mathcal{F}_A$, also beschränkt.

Zu (B_2) : Sind $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_f(X))$, dann existieren $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0(E)$ mit $B_j \subseteq \mathcal{F}_{A_j}$, $j = 1, \dots, n$, und es ist $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{B}_0(E)$. Nun ist aber

$$\bigcup_{i=1}^n B_i \subseteq \mathcal{F}_{\bigcup_{j=1}^n A_j},$$

also auch beschränkt.

Zu (B_3) : Ist $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Lokalisierung von E so ist $(\mathcal{F}_{B_i})_{i \in \mathbb{N}}$ offensichtlich eine von $\mathcal{M}_f(E)$.

Ebenso einfach erhalten wir die Eigenschaft (B_4) : Ist $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_f(E))$, so gibt es per Definition $A \in \mathcal{B}_0(E)$, mit $B \subseteq \mathcal{F}_A \in \mathcal{B}_0(\mathcal{M}_f(E))$.

Nun müssen wir noch nachweisen, dass unser Raum abzählbar separiert ist: Dazu sei wieder $\mathcal{P}_n = (\Lambda_{ni})_{i \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ eine verfeinernde Partitionenfolge von E . Weiter seien $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{M}_f(E)$ und

$$J_{nk} := \{j \in \mathbb{N} \mid \text{card}(\Lambda_{nj} \cap x_k) = 1\},$$

für $k = 1, \dots, m$. Damit definieren wir

$$C_{nk} := \bigcup_{j \in J_{nk}} \Lambda_{nj}.$$

Dann gibt es wegen der Verfeinerungs-Eigenschaft der Partitionen ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für $k = 1, \dots, m$

$$x_k \in \bigcap_{j \in J_{nk}} \mathcal{F}_{\Lambda_{nj}} \cap \mathcal{F}^{C_{nk}^c}.$$

Für festes n sind diese Mengen paarweise disjunkt. Sie trennen also unsere endlichen Punktfigurationen. Wir können daher als separierende beschränkte Mengen die folgenden wählen:

$$\mathcal{L}_{n,m} := \mathcal{F}_{\bigcap_{j \in J_n} \Lambda_{nj}} \cap \mathcal{F}_{\left(\bigcup_{i \in J_m} \Lambda_{ni}\right)^c},$$

wobei J_n, J_m endliche Teilmengen von \mathbb{N} sind¹². Dieses System ist dank der Schnittstabilität der Λ_{nj} auch wieder schnittstabil. \square

Wir sind also in der Lage (einfache) Zählmaße auf $\left(\mathcal{M}_f(E), \mathcal{F}_f(E), \mathcal{B}(\mathcal{M}_f(E))\right)$ zu betrachten, einfach gemäß der vorher erläuterten Theorie. Nun bleibt zu klären, wie wir die Elemente aus $\mathcal{M}_f(E)$ mit „bekanntem“ geometrischen Objekten identifizieren und wie wir einfache Zählmaße auf diesem Raum zu Mosaiken machen. Damit beschäftigen wir uns Kapitel 3.

¹²Von solchen Teilmengen gibt es auch nur abzählbar viele.

2. Cluster-Eigenschaften

In diesem Kapitel soll der Begriff der *Cluster-Eigenschaft* geprägt werden, den wir später zur Analyse von Punktprozessen benutzen werden. Außerdem ermöglichen sie uns die Konstruktion von Punktprozessen in $\mathcal{M}_f(E)$. Die Begriffsbildung und ein großer Teil der Beweisideen entstammen [Zes05a]. Hierbei sind unter *Clustern* bestimmte endliche Punktkonfigurationen zu verstehen, die sich in irgendeinem näher zu definierenden Verhältnis zu einer beliebigen Punktkonfiguration befinden. Mehr zur Vorstellung und der Motivation wird nach der formalen Definition und bei den Beispielen folgen.

2.1. Definitionen und Beispiele

Als Konfigurationsraum sei der euklidische Vektorraum $E = \mathbb{R}^d$ fixiert¹. Zur Vereinfachung sei deswegen $\mathcal{M}(E)$ als \mathcal{M} , $\mathcal{M}_k(E)$ als \mathcal{M}_k und $\mathcal{M}_f(E)$ als \mathcal{M}_f bezeichnet, analog \mathcal{F} , \mathcal{F}_k und \mathcal{F}_f .

Definitionen 2.1.1. Es sei $D \subseteq \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}$. Dann heißt D eine *k-Cluster-Eigenschaft*, wenn $D \in \mathcal{F}_k \otimes \mathcal{F}$. Wir nennen $x \in \mathcal{M}_k$ ein *k-Cluster vom Typ D zu der Punktkonfiguration* $\eta \in \mathcal{M}$ oder einfach *Cluster vom Typ D zu η* , wenn $(x, \eta) \in D$. Gilt zusätzlich $x \subseteq \eta$, so nennen wir x einen *Cluster in η* .

Dieser Begriff lässt sich noch etwas allgemeiner fassen, indem man auch Cluster verschiedener Art, also zu verschiedenen k zulässt:

Definition 2.1.2. Ein Element aus $\mathcal{F}_f \otimes \mathcal{F}$ heiße Multi-Cluster-Eigenschaft. Die Begriffe *Cluster vom Typ D in bzw. zu η* seien analog zu denen bei k -Cluster-Eigenschaften gebildet.

Bemerkung 2.1.3. Offensichtlich ist für eine Multi-Cluster-Eigenschaft D die Menge

$$D_k := D \cap \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}$$

eine k -Cluster-Eigenschaft.

¹In Kapitel 4, Abschnitt 4.2 wird als Grundraum der Raum $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ betrachtet, der als ein mit Marken versehener \mathbb{R}^d aufgefasst werden kann. Dabei handelt es sich um eine nominelle Änderung zum Zwecke der Anschauung, welche die Theorie jedoch nicht verändert.

Wenn aus dem Kontext klar wird oder es keine Rolle spielt, um welchen Typ einer Cluster-Eigenschaft es sich handelt, so sprechen wir einfach von Cluster-Eigenschaften bzw. Clustern.

Ebenso vereinfachen wir Schreibweisen und Anschauung bei 1-Cluster-Eigenschaften, indem wir \mathcal{M}_1 mit E identifizieren. Wir schreiben also $(a, \eta) \in D$ synonym für $(\delta_a, \eta) \in D$. So kann man dann insbesondere die Konfiguration der Cluster in einem einfachen Punktmaß wieder als einfaches Punktmaß deuten.

Die Cluster in einer Punktkonfiguration sind für uns von besonderem Interesse, da sie uns bei bestimmten Cluster-Eigenschaften gute Analyse-Methoden bereitstellen, um Punktmaße aus \mathcal{M} und vor allem Punktprozesse zu analysieren.

In diesem Zusammenhang hat die folgende Abbildung einen besonderen Stellenwert: Sei D eine (Multi- oder k -)Cluster-Eigenschaft und

$$\begin{aligned} \text{cd}_D : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \\ \eta &\longmapsto \sum_{x \subseteq \eta} 1_D(x, \eta). \end{aligned}$$

Sie zählt die Cluster in einer gegebenen Punktkonfiguration η . Deswegen wird sie im Folgenden auch mit *Clusterzählfunktion* bezeichnet. (Diese Abbildung ist messbar, vergl. Kor. A.1.9 auf Seite 106.)

Wie so oft, so spielen auch im Kontext der Cluster-Eigenschaften Symmetrien eine wichtige Rolle. So wird das erste größere Ergebnis nur für eine bestimmte Klasse von Cluster-Eigenschaften gelten, nämlich solche, die unter räumlichen Translationen invariant sind.

Definition 2.1.4. Eine Cluster-Eigenschaft D heißt *translations-invariant* oder auch *stationär*, wenn aus $(x, \eta) \in D$ folgt, dass auch $(x + a, \eta + a) \in D$ für alle $a \in E$.

Zur Verdeutlichung wollen wir zunächst ein paar Beispiele betrachten:

Beispiele 2.1.5. (i) Die in gewisser Weise einfachste translations-invariante 1-Cluster-Eigenschaft ist durch

$$(a, \eta) \in D \quad :\iff \quad a \in E \text{ und } \eta \in \mathcal{M}$$

gegeben, d.h. $D = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}$. Es ist offensichtlich, dass D eine Cluster-Eigenschaft ist und ebenso, dass D stationär ist.

(ii) Wieder sei $k = 1$. Es sei D definiert vermöge

$$(a, \eta) \in D \quad :\iff \quad a \in E, \eta \left(\dot{B}_r(a) \right) = 0.$$

Dann ist dieses D eine Cluster-Eigenschaft (siehe Bemerkung A.2.2) und translations-

invariant: Sei $b \in E$ und $(a, \eta) \in D$. Da $(a, \eta) \in D$ gilt $\eta(\dot{B}_r(a)) = 0$ und somit auch

$$(\eta + b)(\dot{B}_r(a + b)) = \eta(\dot{B}_r(a)) = 0.$$

Also ist auch $(a + b, \eta + b) \in D$. Damit ist D translationsinvariant. Dieses Beispiel ist besonders dann interessant, wenn man folgende Funktion betrachtet:

$$\begin{aligned} \varphi_D : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M}, \\ \eta &\longmapsto \sum_{(a, \eta) \in D, a \in \eta} \delta_a. \end{aligned}$$

(Diese Abbildung ist messbar; vergleiche Bemerkung A.1.11.) In einer Konfiguration $\varphi_D(\eta)$ besitzen die Punkte einen Mindestabstand von r . Die Punkte dieser Konfiguration ließen sich somit als Mittelpunkte harter Kugeln mit Radius $\frac{r}{2}$ deuten. (Siehe Abbildung 2.1.) Hat man also einen Punktprozess P , so realisiert das Bild von P unter

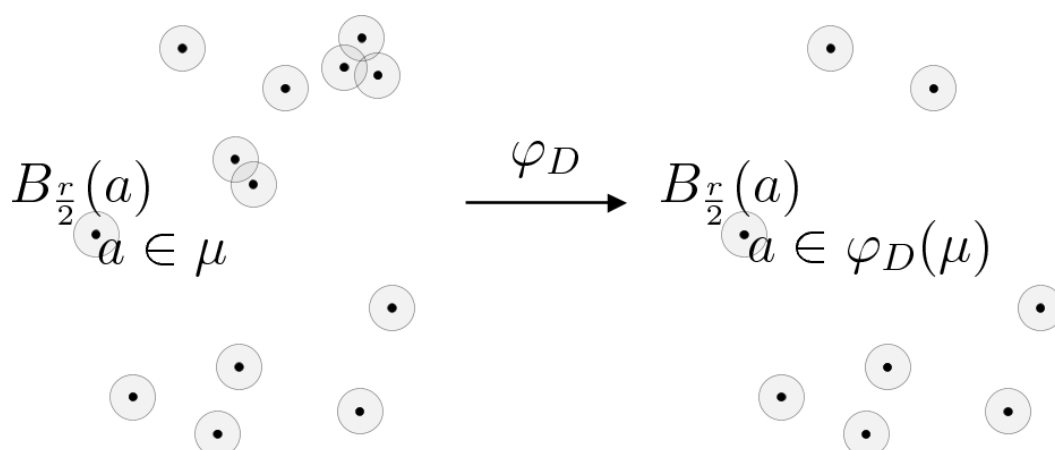


Abbildung 2.1.: Die Abbildung φ_D erzeugt „harte Kugeln“

φ_D zufällig „harte Kugeln“. Einen solchen Prozess nennt man auch *hard core Prozess* (vergleiche z.B. [SKM95], ab S. 162).

In Kapitel 4 werden uns noch weitere, wesentlich komplexere Beispiele von Cluster-Eigenschaften begegnen. Die Idee aus dem letzten Beispiel, aus einem einfachen Punktmaß die Konfiguration der Cluster zu realisieren, lässt sich noch etwas verallgemeinern:

Definition 2.1.6. Es seien $E \subseteq \mathbb{R}^n$ und $E' \subseteq \mathbb{R}^m$ und

$$\varphi : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{M}_f(E'))$$

eine messbare Abbildung. Weiter sei $P \in \mathcal{P}\mathcal{M}(E)$. Dann nennen wir das Bild von P unter

φ einen Cluster-Prozess in E' .

Eine Einführung in Cluster-Prozesse findet sich zum Beispiel in [SKM95], ab Seite 150.

2.2. Das Null-Unendlich-Gesetz der stochastischen Geometrie

Über die Anzahl von Clustern in einer Konfiguration η kann man intuitiv wenig sagen. Der nächste Satz besagt, dass man unter gewissen Voraussetzungen doch eine sehr starke Eingrenzung für den Wertebereich der Funktion cd_D auf zufällig realisierten Konfigurationen hat. Insbesondere für den Poisson-Prozess lassen sich daraus interessante Schlüsse ziehen.

Im Folgenden kürzen wir Aussagen wie „ $x \in \mathcal{M}_f$ und $x \subseteq \eta$ “ mit $x \in \eta \cap \mathcal{M}_f$ ab.

Bemerkung 2.2.1. Ist D eine translationsinvariante Cluster-Eigenschaft, dann ist auch die Abbildung cd_D translationsinvariant, d.h.

$$\text{cd}_D(\eta - a) = \text{cd}_D(\eta), \quad \forall a \in E, \quad \forall \eta \in \mathcal{M}.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \text{cd}_D(\eta - a) &= \sum_{x \in (\eta - a) \cap \mathcal{M}_f} 1_D(x, \eta - a) \stackrel{D \text{ stationär}}{=} \sum_{x \in (\eta - a) \cap \mathcal{M}_f} 1_D(x + a, \eta) \\ &= \sum_{x + a \in \eta \cap \mathcal{M}_f} 1_D(x + a, \eta) \stackrel{y = x + a}{=} \sum_{y \in \eta \cap \mathcal{M}_f} 1_D(y, \eta) \\ &= \text{cd}_D(\eta). \end{aligned}$$

□

Im Folgenden betrachten wir sehr häufig die Menge $\{\eta \in \mathcal{M} \mid 0 < \text{cd}_D \eta < +\infty\}$. Diese sei abkürzend als $\{0 < \text{cd}_D < +\infty\}$ bezeichnet.

Nun aber zum angekündigten Satz:

Satz 2.2.2. (Das Null-Unendlich-Gesetz der stochastischen Geometrie) *Es sei D eine stationäre Cluster-Eigenschaft und $P \in \mathcal{P}_0 \mathcal{M}'$, d.h. ein stationärer einfacher Punktprozess in E .*

Dann gilt

$$P(\{0 < \text{cd}_D < +\infty\}) = 0. \quad (2.1)$$

Beweis. In diesem Beweis betrachten wir lediglich eine k -Cluster-Eigenschaft. Durch leichte Modifikationen an den Beweisschritten² erhält man die Aussage dann für Multi-Cluster-Eigenschaften.

²Meist reicht es die D_k aus Bemerkung 2.1.3 zu betrachten und dann über k zu summieren.

Da cd_D messbar ist, ist auch das Ereignis $\{0 < \text{cd}_D < +\infty\}$ ein messbares Ereignis. Entgegen der Aussage unseres Satzes sei $P(\{0 < \text{cd}_D < +\infty\}) > 0$.

Dann ist

$$\tilde{P} := P(\cdot \mid \{0 < \text{cd}_D < +\infty\})$$

ein einfacher Punktprozess in E .

\tilde{P} ist sogar stationär:

Sei $A \in \mathcal{F}$, dann

$$\tilde{P}(A) = \frac{P(A \cap \{0 < \text{cd}_D < +\infty\})}{P(\{0 < \text{cd}_D < +\infty\})}$$

und für $e \in E$ ist

$$\begin{aligned} \tilde{P}(A - e) &= \frac{P((A - e) \cap \{0 < \text{cd}_D < +\infty\})}{P(\{0 < \text{cd}_D < +\infty\})} \\ &\stackrel{\text{cd}_D \text{ translationsinvariant}}{=} \frac{P((A - e) \cap (\{0 < \text{cd}_D < +\infty\} - e))}{P(\{0 < \text{cd}_D < +\infty\})} \\ &= \frac{P((A \cap (\{0 < \text{cd}_D < +\infty\}) - e))}{P(\{0 < \text{cd}_D < +\infty\})} \\ &\stackrel{P \text{ translationsinvariant}}{=} \frac{P(A \cap \{0 < \text{cd}_D < +\infty\})}{P(\{0 < \text{cd}_D < +\infty\})} \\ &= \tilde{P}(A). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns nun für das Bild P^* von \tilde{P} unter der Abbildung

$$\begin{aligned} \chi: \mathcal{M} \cap \{0 < \text{cd}_D < +\infty\} &\longrightarrow E, \\ \eta &\longmapsto \frac{1}{\text{cd}_D(\eta)} \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_k} 1_D(x, \eta) bx. \end{aligned}$$

Hierbei ist $bx = \frac{1}{\text{card } x} \sum_{a \in x} a$ das Baryzentrum von x .

Dieses χ ist messbar bezüglich der Spur- σ -Algebra $\mathcal{F} \cap \{0 < \text{cd}_D < +\infty\}$, siehe Anhang, Korollar A.1.10, Seite 106. Weiterhin ist das Bild P^* translationsinvariant:

Sei $A \in \mathcal{B}(E)$, $a \in E$ und $\eta \in \{0 < \text{cd}_D < +\infty\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \chi(\eta - a) &= \frac{1}{\text{cd}_D(\eta - a)} \sum_{x \in (\eta - a) \cap \mathcal{M}_k^i} 1_D(x, \eta - a) bx \\
 &\stackrel{\text{cd}_D \text{ transl.inv.}}{=} \frac{1}{\text{cd}_D(\eta)} \sum_{x \in (\eta - a) \cap \mathcal{M}_k^i} 1_D(x, \eta - a) bx \\
 &\stackrel{D \text{ transl.inv.}}{=} \frac{1}{\text{cd}_D(\eta)} \sum_{x+a \in \eta \cap \mathcal{M}_k^i} 1_D(x+a, \eta) bx \\
 &= \frac{1}{\text{cd}_D(\eta)} \sum_{y \in \eta \cap \mathcal{M}_k^i} 1_D(y, \eta) \underbrace{b(y-a)}_{by-a} \\
 &= \frac{1}{\text{cd}_D(\eta)} \left[\underbrace{\sum_{y \in \eta \cap \mathcal{M}_k^i} 1_D(y, \eta) by - a}_{\chi(\eta)} \quad \underbrace{\sum_{y \in \eta \cap \mathcal{M}_k^i} 1_D(y, \eta)}_{\text{cd}_D(\eta)} \right] \\
 &= \chi(\eta) - a .
 \end{aligned}$$

Und somit ist

$$\begin{aligned}
 \chi^{-1}(A - a) &= \{\eta \in \mathcal{M} \cap \{0 < \text{cd}_D < +\infty\} \mid \chi(\eta) \in A - a\} \\
 &= \{\eta \in \mathcal{M} \cap \{0 < \text{cd}_D < +\infty\} \mid \chi(\eta) + a \in A\} \\
 &= \{\eta \in \mathcal{M} \cap \{0 < \text{cd}_D < +\infty\} \mid \chi(\eta + a) \in A\} \\
 &= \{(\eta - a) \in \mathcal{M} \cap \{0 < \text{cd}_D < +\infty\} \mid \chi(\eta) \in A\} \\
 &= \chi^{-1}(A) - a .
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann direkt

$$\begin{aligned}
 P^*(A - a) &= \tilde{P} \circ \chi^{-1}(A - a) = \tilde{P} \circ (\chi^{-1}(A) - a) \stackrel{\tilde{P} \text{ transl.inv.}}{=} \tilde{P} \circ \chi^{-1}(A) \\
 &= P^*(A) .
 \end{aligned}$$

P^* ist also eine translationsinvariante Wahrscheinlichkeit auf $E = \mathbb{R}^d$. Aber eine solche existiert nicht (vergleiche [Bau92] Satz 8.1, S.46).

Somit ist die Annahme $P(\{0 < \text{cd}_D < +\infty\}) > 0$ falsch und es muss die Aussage des Satzes gelten. □

2.3. Anwendungen des Null-Unendlich-Gesetzes

Die Aussagekraft des Satzes 2.2.2 lässt sich an folgendem Korollar gut nachvollziehen:

Korollar 2.3.1. Für einen stationären Punktprozess P in E gilt

$$P(\{\eta \in \mathcal{M} \mid 0 < \eta(E) < +\infty\}) = 0.$$

D.h. ein stationärer Punktprozess produziert fast sicher keine oder unendlich viele Punkte.

Beweis. Wähle als Cluster-Eigenschaft D die erste aus Beispiel 2.1.5, d.h. unser Standardbeispiel. Dann ergibt Satz 2.2.2 die Aussage, da in diesem Fall $\text{cd}_D = \zeta_E$. \square

Wir wollen nun aber Prozesse P konstruieren, die fast sicher Punktfigurationen $\eta \in \mathcal{M}$ realisieren, so dass unendlich viele Cluster in η existieren, nicht nur unendlich viele Punkte, d.h. $P(\{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta = +\infty\}) = 1$. Wir bezeichnen im Folgenden $\mathcal{M}_D := \{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta = +\infty\}$. Einen Weg, solche Prozesse zu generieren, bietet das folgende Korollar zum Null-Unendlich-Gesetz:

Korollar 2.3.2. Sei $P \in \mathcal{P}_0 \mathcal{M}$ und D eine translations-invariante Cluster-Eigenschaft mit

$$P(\{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta \geq 1\}) > 0. \tag{2.2}$$

Dann ist $P_D := P(\cdot \mid \{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta \geq 1\})$ translations-invarianter einfacher Punktprozess in E , der auf $\{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta = +\infty\}$ konzentriert ist.

Beweis. Wegen $P(\{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta \geq 1\}) > 0$ ist

$$P_D(\cdot) = \frac{P(\cdot \cap \{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta \geq 1\})}{P(\{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta \geq 1\})}$$

wohldefiniert. Die Stationarität von P impliziert sofort die Stationarität von P_D . Da

$$P_D(\{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta \geq 1\}) = 1,$$

liefert Satz 2.2.2, dass

$$P_D(\{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta < \infty\}) = 0,$$

d.h. $P_D(\mathcal{M}_D) = 1$. \square

Die Eigenschaft $P(\{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta \geq 1\}) > 0$ lässt sich im Allgemeinen einfacher nachweisen als $P(\mathcal{M}_D) > 0$ und das werden wir auch in Kapitel 5 nutzen.

Interessanter Weise verändert diese Bedingung unseren Standard-Punktprozess, den Poisson-Punktprozess, bei bestimmten Clustereigenschaften nicht. Diese Bedingung, die wir nun einführen werden, hat vor allem technische Gründe. Intuitiv ist aber auch klar, dass sie eine

gewisse Stabilität von Cluster-Eigenschaften und deren Punktfigurationen unter „kleinen lokalen Veränderungen“ bewirkt.

Definition 2.3.3. Eine Cluster-Eigenschaft D heiße *von endlicher Reichweite*, wenn gilt, dass

$$\eta \in \mathcal{M}_D \iff \eta - \delta_e \in \mathcal{M}_D \forall e \in \eta. \quad (2.3)$$

Ist $P = P_\rho$, der Poisson-Punktprozess mit Intensitätsmaß ρ , so sei, sofern definiert, P_D der Genauigkeit halber mit $P_{\rho,D}$ bezeichnet.

Satz 2.3.4. *Es sei $\rho = z\lambda$, wobei λ das Lebesgue-Maß in E , $z \in \mathbb{R}^+$, und P_ρ der zugehörige Poisson-Punktprozess. Sei weiterhin D eine translations-invariante Cluster-Eigenschaft von endlicher Reichweite, derart, dass $P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_D \eta \geq 1\}) > 0$. Dann gilt*

$$P_{\rho,D} = P_\rho. \quad (2.4)$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass, wegen der Definition von ρ , P_ρ ein stationärer einfacher Punktprozess in E ist. Damit ist $P_{\rho,D}$ wohldefiniert und es gilt per Definition für alle $\varphi \in \mathcal{F}_+(\mathcal{M})$:

$$P_{\rho,D}(\varphi) = \int_{\mathcal{M}} \varphi(\eta) P_{\rho,D}(\text{d}\eta) = \frac{1}{P_\rho(\mathcal{M}_D)} \int_{\mathcal{M}_D} \varphi(\eta) P_\rho(\text{d}\eta). \quad (2.5)$$

Wir werden nun die Methode des Campbell-Maßes benutzen, um die Gleichung (2.4) zu zeigen. Dazu müssen wir zeigen, dass für $P_{\rho,D}$ die Mecke-Formel gilt, d.h. für messbares $h : E \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ gilt

$$\mathcal{C}_{P_{\rho,D}}(h) = \int_{\mathcal{M}} \int_E h(e, \eta + \delta_e) \rho(\text{d}e) P_{\rho,D}(\text{d}\eta).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{P_{\rho,D}}(h) &= \int_{\mathcal{M}} \int_E h(e, \eta) \eta(\text{d}e) P_{\rho,D}(\text{d}\eta) \\ &= \frac{1}{P_\rho(\mathcal{M}_D)} \int_{\mathcal{M}_D} \int_E h(e, \eta) \eta(\text{d}e) P_\rho(\text{d}\eta) \\ &= \frac{1}{P_\rho(\mathcal{M}_D)} \int_{\mathcal{M}} \int_E 1_{\mathcal{M}_D}(\eta) h(e, \eta) \eta(\text{d}e) P_\rho(\text{d}\eta). \end{aligned}$$

Da die Mecke-Formel für P_ρ gilt, haben wir dann

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{P_{\rho,D}}(h) &= \frac{1}{P_\rho(\mathcal{M}_D)} \int_{\mathcal{M}} \int_E 1_{\mathcal{M}_D}(\eta + \delta_e) h(e, \eta + \delta_e) \rho(\mathrm{d}e) P_\rho(\mathrm{d}\eta) \\
 &\stackrel{(2.3)}{=} \frac{1}{P_\rho(\mathcal{M}_D)} \int_{\mathcal{M}} \int_E 1_{\mathcal{M}_D}(\eta) h(e, \eta + \delta_e) \rho(\mathrm{d}e) P_\rho(\mathrm{d}\eta) \\
 &= \int_{\mathcal{M}} \int_E h(e, \eta + \delta_e) \rho(\mathrm{d}e) P_{\rho,D}(\mathrm{d}\eta).
 \end{aligned}$$

□

Insbesondere haben wir dann:

Korollar 2.3.5. *Es seien ρ und D wie in Satz 2.3.4. Dann gilt*

$$P_\rho(\mathcal{M}_D) = 1,$$

d.h. in dieser Situation realisiert der Poisson-Punktprozess fast sicher unendlich viele Cluster vom Typ D .

3. Anpassung der geometrischen Begriffe

Die klassischen Definitionen derjenigen geometrischen Objekte, die wir zufällig realisieren wollen, sind nicht direkt in den Kontext der Punktprozesse einbettbar. Sie besitzen aber glücklicherweise hinreichend „diskrete Struktur“, um sich dennoch an die Bedürfnisse dieser Arbeit anpassen zu lassen. Um die Begriffe voneinander abzuheben werden wir die angepassten Begriffe mit dem Adjektiv „diskret“ kennzeichnen, sofern es aus dem Kontext nicht hervorgeht.

3.1. Konvexe Polytope

Die Definitionen und Eigenschaften der folgenden klassischen geometrischen Begriffe sind [Grü67] und [Brø83] entnommen. Für die rein geometrischen Beweise sei ebenfalls auf diese Bücher verwiesen, da sie von den Zielen dieser Arbeit ablenken würden.

Der Vollständigkeit der Begriffsbildung halber werden hier auch viele Definitionen und Eigenschaften erwähnt, die unter Mathematikern allgemein bekannt sind:

Es sei $E = \mathbb{R}^d$ zusammen mit den Borelmengen bzgl. der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie und den metrisch beschränkten Mengen als zugrundeliegender Phasenraum fixiert.

Definition 3.1.1. Eine Teilmenge \mathbf{k} von E heißt *konvex*, wenn zu je zwei Punkten k_1, k_2 aus \mathbf{k} auch die Verbindungslinie $\{\lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2 \mid \lambda \in [0, 1]\}$ ganz in \mathbf{k} liegt.

Offensichtlich sind beliebige Schnitte von konvexen Mengen wieder konvex und das rechtfertigt folgende Bezeichnung:

Definition 3.1.2. Sei $\mathbf{a} \subseteq E$. Dann ist die *konvexe Hülle* $\langle \mathbf{a} \rangle$ gegeben durch den Schnitt aller konvexen Teilmengen von E , die \mathbf{a} enthalten.

Wie bereits aus den ersten Kapiteln gewohnt, identifizieren wir $x \in \mathcal{M}(E)$ mit seinem Träger und somit definieren wir

$$\langle x \rangle := \langle \{v \mid v \in x\} \rangle.$$

3. Anpassung der geometrischen Begriffe

In diesem Sinne ist $\langle \mathbf{a} \rangle$ die kleinste konvexe Menge in E , die \mathbf{a} enthält. Einfache Überlegungen zeigen, dass für endliche Teilmengen $\{v_1, \dots, v_n\}$ von E gilt, dass

$$\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Für unsere spätere Begriffsbildung ist außerdem dieses Objekt wichtig:

Definition 3.1.3. Sei \mathbf{k} eine konvexe Menge. Ein Punkt $v \in \mathbf{k}$ heißt *Extremalpunkt* von \mathbf{k} , wenn für $k_1, k_2 \in \mathbf{k}$, $0 < \lambda < 1$ mit $x = \lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2$ folgt, dass $x = k_1 = k_2$.

Die Menge der Extremalpunkte von \mathbf{k} sei mit $\text{ext } \mathbf{k}$ bezeichnet.

Mit anderen Worten: Ein Extremalpunkt ist nicht im relativen Inneren eines Liniensegmentes in \mathbf{k} enthalten.

Eine bestimmte Klasse konvexer Mengen sind abgeschlossene¹ *Halbräume* H^- . Diese können immer in der Form $H^- = H^-(\alpha, u) = \{v \in E \mid v \cdot u \leq \alpha\}$ dargestellt werden, wobei $u \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und „ \cdot “ das Standardskalarprodukt in E ist. Umgekehrt ist jede solche Menge ein Halbraum. Ebenso gilt dies für Mengen der Form $H^+ = H^+(\alpha, u) = \{v \in E \mid v \cdot u \geq \alpha\}$. Analog lässt sich auch eine $(d - 1)$ -dimensionale *Hyperebene* H immer durch $H = H(\alpha, u) = \{v \in E \mid v \cdot u = \alpha\}$ beschreiben. Bei gleichen u, α begrenzt diese Hyperebene dann den entsprechenden Halbraum.

Außerdem werden folgende Begriffe benötigt:

Definitionen 3.1.4. Sei \mathbf{k} eine konvexe Menge.

Eine Hyperebene H heißt *Stütz-Hyperebene* von \mathbf{k} , wenn $H \cap \mathbf{k} \neq \emptyset$ und \mathbf{k} ganz in einem der von H begrenzten Halbräume liegt.

Eine Teilmenge $\mathbf{f} \neq \emptyset$ von \mathbf{k} heißt *Seite* von \mathbf{k} , wenn es eine Stütz-Hyperebene H gibt mit $H \cap \mathbf{k} = \mathbf{f}$. Man nennt außerdem \mathbf{k} und \emptyset die *uneigentlichen Seiten* von \mathbf{k} .

Die *Dimension* von \mathbf{f} ist bestimmt durch die kleinste Dimension von affinen Unterräumen in denen \mathbf{f} enthalten ist. Die 0-dimensionalen Seiten einer konvexen Menge \mathbf{k} werden auch *exponierte Punkte* der Menge genannt und mit $\text{exp } \mathbf{k}$ bezeichnet.

Eine Teilmenge von E heißt *Polygon*, wenn sie der Schnitt von endlich vielen Halbräumen ist.

Nun kommen wir zum vielleicht wichtigsten geometrischen Objekt für diese Arbeit:

Definition 3.1.5. Eine beschränkte konvexe Teilmenge \mathbf{p} von E heißt *konvexes² Polytop*, wenn \mathbf{p} die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten aus E ist (siehe Abbildung 3.1). Die

¹Wenn im Folgenden von Halbräumen die Rede ist, dann ist damit immer ein abgeschlossener gemeint, solange dem nicht explizit widersprochen wird.

²Da in dieser Arbeit lediglich konvexe Polytope behandelt werden, wird im Folgenden nur von Polytopen gesprochen.

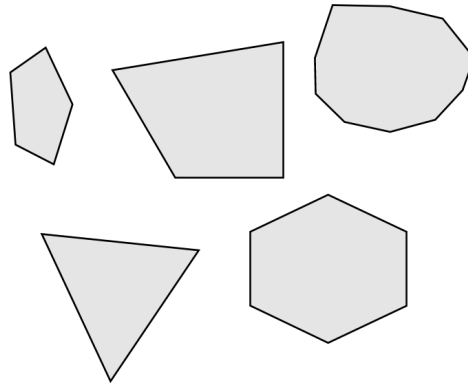


Abbildung 3.1.: Eine Kollektion von konvexen Polytopen

exponierten Punkte eines Polytops werden auch Vertizes genannt. Die Menge aller Vertizes eines Polytops \mathbf{p} wird mit $\text{vert } \mathbf{p}$ bezeichnet.

Um eine gewisse Eindeutigkeit für die „endlich vielen Punkte“ aus E zu erhalten, stellen wir fest:

Bemerkung 3.1.6. Ein Polytop ist konvexe Hülle seiner Vertizes.

Beweis. Nach [Brø83] S. 45 ist ein Polytop \mathbf{p} die konvexe Hülle seiner extremalen Punkte. Nach [Grü67], S. 31 gilt aber $\text{ext } \mathbf{p} = \text{exp } \mathbf{p} = \text{vert } \mathbf{p}$ für Polytope. \square

Außerdem bemerken wir:

Bemerkung 3.1.7. Ein Polygon ist genau dann ein Polytop, wenn es beschränkt ist.

Beweis. Siehe [Grü67] S. 31f. \square

Wir identifizieren nun einfach ein Polytop mit seinen Vertizes:

Definition 3.1.8. Sei $x \in \mathcal{M}_f(E)$. Dann heißt x *diskretes (konvexes) Polytop in E* , wenn

$$a \in x \implies \text{es existiert eine Hyperebene } H \text{ mit } H \cap \langle x \rangle = \{a\}. \quad (3.1)$$

(Siehe dazu Abbildung 3.2.) Die Menge aller diskreten konvexen Polytope in E sei mit $\mathcal{K}(E)$ bezeichnet.

Eine Rechtfertigung für diese Definition bietet folgende Bemerkung:

Bemerkung 3.1.9. Es gilt (vergleiche Abbildung 3.3):

- (i) Ist $x \in \mathcal{K}(E)$, dann ist $\langle x \rangle$ ein konvexes Polytop (im klassischen Sinne) und
- (ii) ist \mathbf{p} ein konvexes Polytop, so gibt es eindeutig $x \in \mathcal{K}(E)$ mit $\langle x \rangle = \mathbf{p}$.

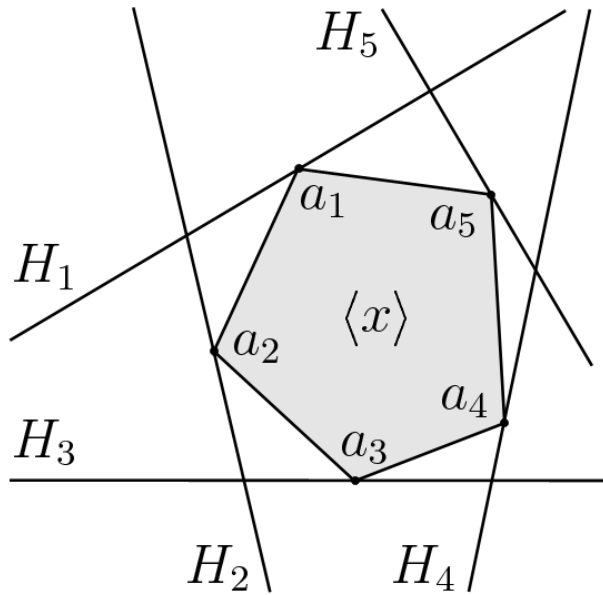


Abbildung 3.2.: Veranschaulichung der Definition eines diskreten Polytops

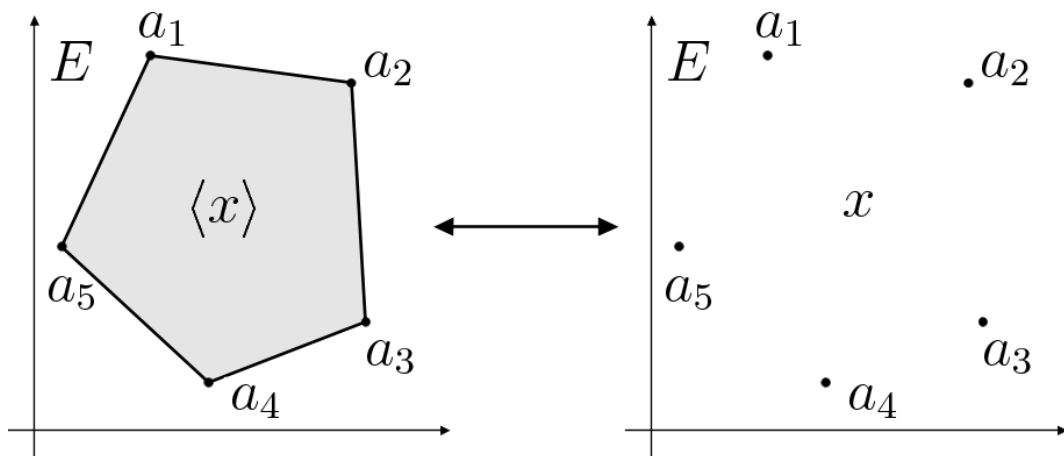


Abbildung 3.3.: Beziehung zwischen diskreten und klassischen Polytopen

Beweis. Zu (i): Die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten ist ein konvexes Polytop per Definition.

Zu (ii): Definiere $x = \sum_{a \in \text{vert } \mathbf{p}} \delta_a$. Dann ist $\langle x \rangle = \mathbf{p}$ wegen Bem. 3.1.6. Die Elemente von x sind die Vertizes des konvexen Polytops $\langle x \rangle$, also gilt (3.1).

Sei nun $y = \sum_{i=1}^n \delta_{v_i} \in \mathcal{K}(E)$ mit $\langle y \rangle = \mathbf{p}$. Wegen (3.1) ist $y \subseteq x$. Nach [Brø83] S. 45 gilt aber auch

$$\mathbf{p} = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle \Rightarrow \text{ext } \mathbf{p} \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}.$$

□

Bei der Definition der klassischen konvexen Polytope haben wir die leere Menge nicht ausgeschlossen. Das Analogon unter den diskreten Polytopen ist dann das Nullmaß μ_N .

Zu bemerken bleibt, dass $\mathcal{K}(E) \in \mathcal{F}_f(E)$. (Siehe Anhang A.2.3 auf Seite 112.)

3.2. Simplizes

Die Begriffsbildung, die hier gewählt wurde richtet sich im Wesentlichen nach den Definitionen von [Blo97]. Der Begriff „Simplex“ basiert dabei mehr auf geometrischen Überlegungen und weniger auf topologischen und kombinatorischen. Bei uns ist ein Simplex ein minimales Polytop in dem Sinne, dass es von möglichst wenig Vertizes aufgespannt ist und dennoch „volle Dimension“ besitzt.

Definition 3.2.1. Eine endliche Teilmenge $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \subseteq E$, $n \in \mathbb{N}$ und $n \leq d$, heißt *affin unabhängig*, wenn der von v_1, \dots, v_{n+1} aufgespannte affine Unterraum die Dimension n besitzt³.

Mit dieser Definition sind wir nun auch in der Lage, geometrische und diskrete Simplizes zu definieren:

Definition 3.2.2. Es sei $\mathbf{s} \subseteq E$. Gibt es $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \subseteq E$, $n \in \mathbb{N}$ und $n \leq d$, eine Menge affin unabhängiger Punkte, so dass $\mathbf{s} = \langle \{v_1, \dots, v_{n+1}\} \rangle$, dann heißt $\langle \mathbf{s} \rangle$ *n-Simplex in E* oder einfach *Simplex*.

So sind 1-Simplizes Liniensegmente, 2-Simplizes Dreiecke und 3-Simplizes Tetraeder (Abbildung 3.4).

Natürlich sind Simplizes als konvexe Hüllen endlich vieler Punkte wieder Polytope. Nach [Grü67], S.53 sind die affin unabhängigen Punkte, die den Simplex aufspannen, genau dessen Vertizes und so lassen sich angelehnt an Bemerkung 3.1.9 zu den diskreten Polytopen nun *diskrete Simplizes* definieren:

³Die hier gegebene Definition ist nicht identisch mit derjenigen in [Blo97]. Sie erweist sich jedoch aus den Definitionen und Eigenschaften, die in [Blo97] auf den Seiten 381-384 gegeben werden, als äquivalent.

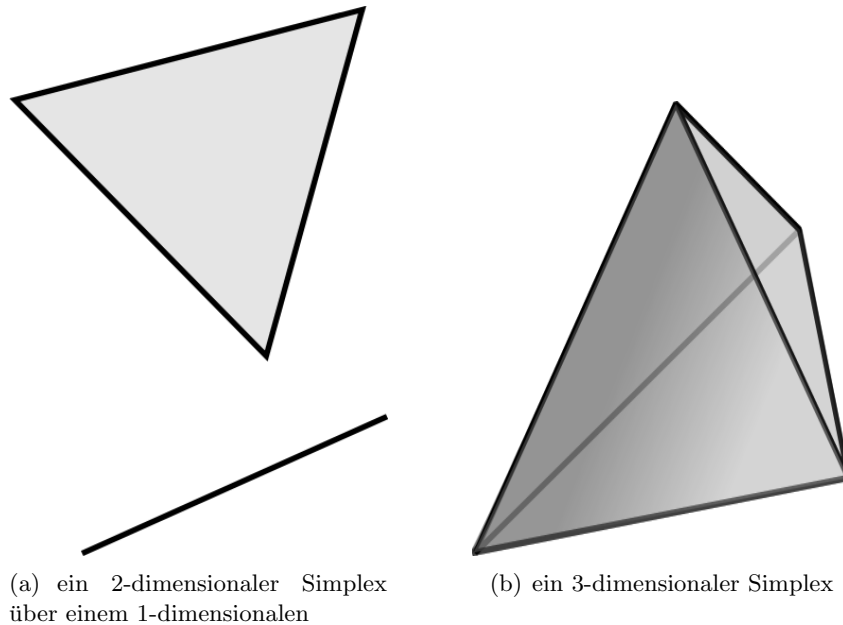


Abbildung 3.4.: Klassische Simplizes

Definition 3.2.3. $x \in \mathcal{M}_f(E)$ heiße *diskreter Simplex*, wenn der Träger von x eine Menge affin unabhängiger Punkte ist. Die Menge der diskreten Simplizes in E sei mit $\mathcal{S}(E)$ bezeichnet.

Auch hier ist offensichtlich, dass ein diskreter Simplex ein diskretes Polytop ist. Die Menge der diskreten Simplizes ist messbar, genauer $\mathcal{S}(E) \in \mathcal{F}_f(E)$. (Siehe Anhang A.2.3 auf Seite 112.)

Eine bei den 2-Simplizes bzw. Dreiecken im \mathbb{R}^2 bekannte Eigenschaft ist, dass es einen eindeutigen Umkreis gibt, d.h. einen Kreis auf dem die 3 Vertizes des Dreiecks liegen. Diese Aussage lässt sich verallgemeinern:

Lemma 3.2.4. Sei $\mathbf{a} := \{v_1, \dots, v_{d+1}\}$ eine Menge affin unabhängiger Punkte in $E = \mathbb{R}^d$. Dann gibt es genau eine abgeschlossene Kugel K , so dass alle v_i , $i = 1, \dots, d + 1$ im Rand von K liegen.

Beweis. Wir werden Induktion über die Dimension d anwenden, um die Existenz einer solchen Kugel zu beweisen: In $d = 1$ haben wir also zwei Punkte $a, b \in \mathbb{R}$, diese sind genau dann affin unabhängig, wenn sie nicht gleich sind. Aber dann ist $B_{\frac{|a-b|}{2}}(\frac{a+b}{2})$ offensichtlich eine solche Kugel.

Ist nun $d > 1$, so seien a_1, \dots, a_{d+1} beliebige affin unabhängige Punkte. Ebenso sind natürlich a_1, \dots, a_d affin unabhängig und liegen alle in einer $d - 1$ -dimensionalen Hyperebene H . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir diese mit \mathbb{R}^{d-1} identifizieren. Es

gibt also nach Induktionsvoraussetzung eine $d - 1$ -dimensionale Kugel in H , die die Punkte a_1, \dots, a_d in ihrem Rand hat. Es sei b der Mittelpunkt dieser Kugel. Wählt man nun einen Punkt c auf der Senkrechten S zu H durch b , so hat er denselben Abstand d_c zu allen Punkten a_1, \dots, a_d . Mit anderen Worten alle diese Punkte liegen auf dem Rand der Kugel $B_{d_c}(c)$. Nun ist aber $\mathbb{R}^d \setminus H = \bigcup_{c \in S} \partial B_{d_c}(c) \setminus H$. Da a_1, \dots, a_{d+1} affin unabhängig sind, liegt a_{d+1} aber nicht in der Hyperebene H , und es gibt $c \in S$, so dass $a_{d+1} \in \partial B_{d_c}(c)$.

Zur Eindeutigkeit der Kugel: Seien a_1, \dots, a_{d+1} affin unabhängig und K_1 und K_2 zwei Kugeln mit diesen Punkten im Rand. Der Rand der beiden Kugeln sind jeweils $(d-1)$ -Sphären. Da die affin unabhängigen Punkte in beiden Rändern liegen, liegen sie also offensichtlich im Schnitt der beiden Sphären. Der Schnitt zweier nichtgleicher solcher Sphären liegt aber ganz in einer $d - 1$ -dimensionalen Hyperebene. Dies steht im Widerspruch zur affinen Unabhängigkeit der Punkte a_1, \dots, a_{d+1} . Also müssen die Sphären und damit auch die Kugeln gleich sein. \square

Definition 3.2.5. Sei $\mathbf{a} := \{v_1, \dots, v_{d+1}\}$ eine Menge affin unabhängiger Punkte in $E = \mathbb{R}^d$ und \mathbf{s} der von diesen Punkten aufgespannte Simplex, dann heißt die nach Lemma 3.2.4 eindeutig definierte Kugel K , die v_1, \dots, v_{d+1} im Rand hat, die Umkugel von \mathbf{s} .

Ist x der zu \mathbf{s} gehörige diskrete Simplex, so bezeichnen wir von nun an die Umkugel von \mathbf{s} mit $K(x)$. Der Rand dieser Kugel sei mit $S(x)$ bezeichnet.

Natürlich liegt wegen der Konvexität der Umkugel ein Simplex immer komplett in der jeweiligen Umkugel.

Und noch eine Eigenschaft von Simplizes werden wir benutzen:

Bemerkung 3.2.6. Sei \mathbf{s} ein Simplex und v_1, \dots, v_n seine Vertizes. Dann ist für jede Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ die affine Hülle $\langle \{v_i | i \in I\} \rangle$ eine Seite von \mathbf{s} .

Beweis. Siehe [Brø83], Theorem 12.2., Seite 77. \square

3.3. Lokal endliche Mosaik

Wir kommen nun zu den Mosaiken, die wir später zufällig realisieren wollen. In Anlehnung an den Begriff des Mosaiks, den wir z.B. für die Kachelung antiker Böden oder für kunstvoll mit Glasstücken gestaltete Fenster benutzen, handelt es sich dabei um eine Zusammenstellung von Bruchstücken, in unserem Falle Polytopen, die geeignet zusammen passen. (Siehe z.B. Abbildung 3.5.)

Definition 3.3.1. $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{M}_f(E))$ heiße (*seitentreues*) lokal endliches Mosaik in E , wenn (M_1) Elemente von μ konvexe Polytope sind, d.h.

$$x \in \mu \implies x \in \mathcal{K}(E), \tag{3.2}$$

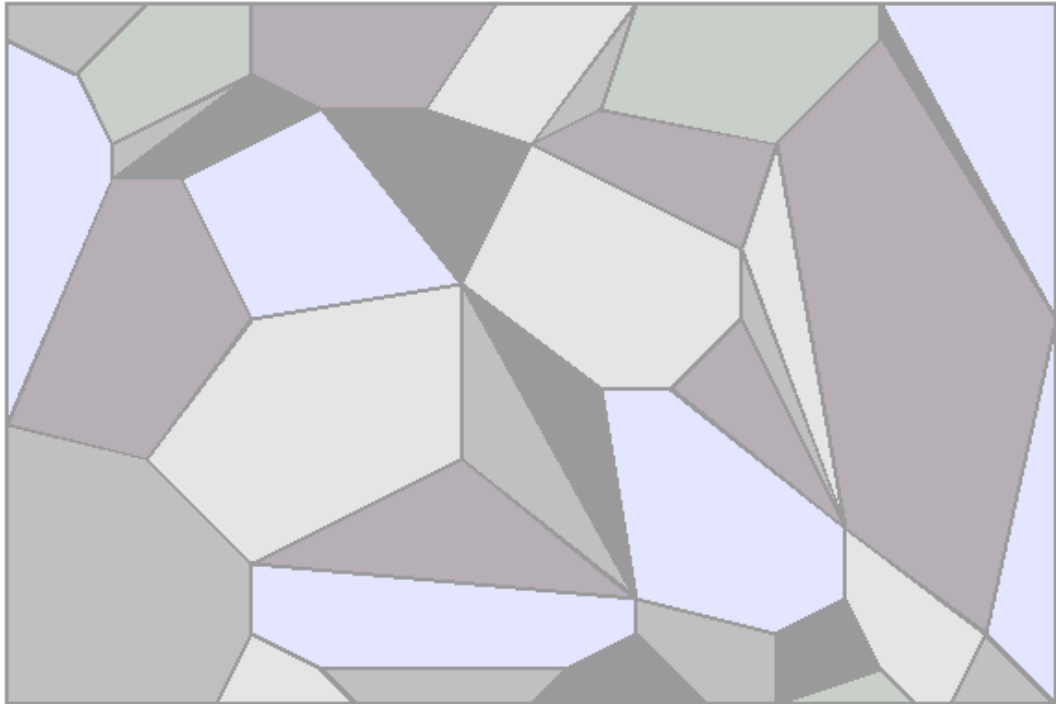


Abbildung 3.5.: Ein Mosaik, „wie man es sich vorstellt“

(M_2) „die Polytope sich nur in ganzen Seiten“ schneiden (siehe Abb. 3.6), d.h. sind $x, y \in \mu$, $x \neq y$ und $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \emptyset$, dann gibt es eine Hyperebene H , so dass $\langle x \rangle \cap H = \langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \langle y \rangle \cap H$ und $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ ganz in jeweils einem der von H erzeugten Unterräume liegen. (Mit anderen Worten ist H eine Stützhyperebene von $\langle x \rangle$ und $\langle y \rangle$.)

Ein lokal endliches Mosaik μ heiße *vollständig*, wenn

$$\bigcup_{x \in \mu} \langle x \rangle = E. \quad (3.3)$$

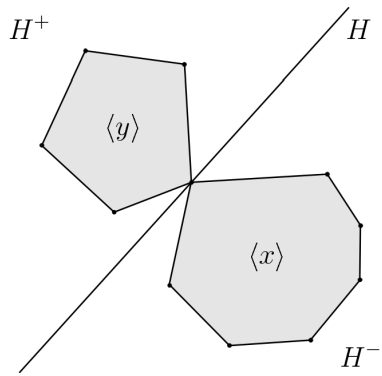
Die Menge der lokal endlichen Mosaike in E sei mit $\mathcal{M}(E)$ und die der vollständigen lokal endlichen Mosaike mit $\mathcal{M}_v(E)$ bezeichnet. Die Elemente x eines Mosaiks μ nennen wir *Zellen des Mosaiks*.

Im Zusammenhang mit der Bedingung (M_2) ist folgende Bemerkung interessant:

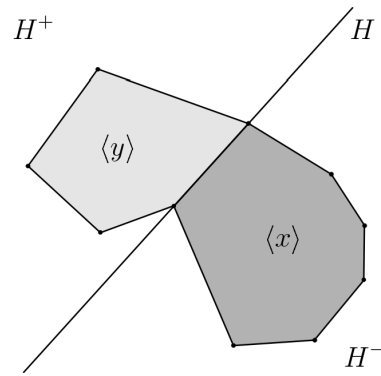
Bemerkung 3.3.2. Sei \mathbf{p} ein Polytop und \mathbf{f} eine Seite davon. Dann ist \mathbf{f} ebenfalls ein Polytop und $\text{ext } \mathbf{f} = \mathbf{f} \cap \text{ext } \mathbf{p}$.

Beweis. Siehe [Br83] S. 45⁴. □

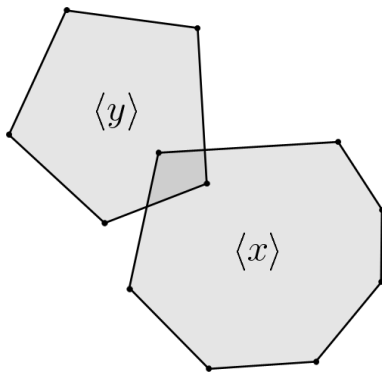
⁴[Br83] definiert die Seite einer konvexen Menge etwas anders, als dies in dieser Arbeit geschehen ist. Er stellt aber ebenfalls fest, dass im Falle von Polytopen unsere und seine Definition zusammenfallen.



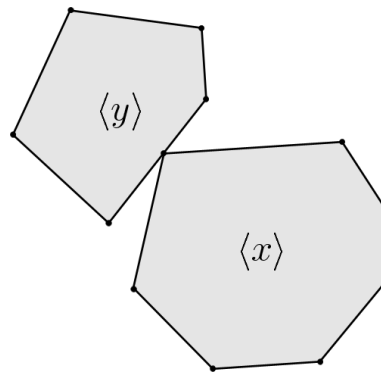
(a) erlaubt in einem Mosaik: Schnitt in einem Vertex



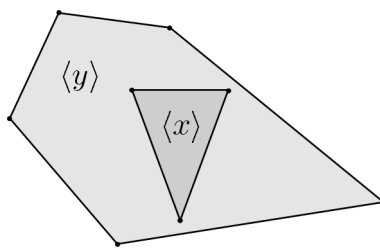
(b) ebenfalls erlaubt: Schnitt in einer 1-Seite



(c) unerlaubt in einem Mosaik: „Überlappung“ zweier Polytope



(d) auch unerlaubt: Vertex des einen Polytops liegt im relativen Inneren einer Seite



(e) ebenfalls unerlaubt: ein Polytop liegt ganz im Inneren eines anderen

Abbildung 3.6.: Überlappung von Polytopen

Somit folgt aus Bedingung (M_2) also auch $x \cap H = x \cap y = y \cap H$ und $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \langle x \cap y \rangle$. Wir wollen die Bedingung (M_2) im Folgenden kurz mit *Seitentreue* betiteln.

Analog zu Mosaiken, die aus konvexen Polytopen bestehen, definieren wir nun für Simplizes:

Definition 3.3.3. Ein Konfiguration $\mu \in \mathbb{M}(E)$ heißt *simpliziales Mosaik in E* , wenn für alle $x \in \mu$ gilt, dass $x \in \mathcal{S}(E)$. Ebenso heißt ein simpliziales Mosaik *vollständig*, wenn zusätzlich $\mu \in \mathbb{M}_v(E)$. Die Menge der simplizialen Mosaik in E sei mit $\mathbb{M}^s(E)$, die Menge der vollständigen simplizialen Mosaik mit $\mathbb{M}_v^s(E)$ bezeichnet.

Mit diesen geometrischen Grundbegriffen sind wir nun in der Lage auf der Basis von Punktprozessen zufällige Mosaik zu beschreiben:

Definition 3.3.4. Eine Wahrscheinlichkeit $P \in \mathcal{PM}(\mathcal{M}_f(E))$ heißt *zufälliges Mosaik*, wenn für jede messbare Menge $M \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{M}_f(E))$ mit $\mathbb{M}(E) \subseteq M$ gilt, dass $P(M) = 1$. Gilt sogar $P(M_0) = 1$ für alle $M_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{M}_f(E))$ mit $\mathbb{M}_v(E) \subseteq M_0$, so nennen wir P ein *zufälliges vollständiges Mosaik*. Analog bilden wir die Begriffe eines *zufälligen simplizialen* und eines *zufälligen vollständigen und simplizialen Mosaiks*.

4. Zufällige vollständige Mosaik

Unter einem *zufälligen Mosaik* verstehen wir einen Punktprozess in $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$, der auf den lokal endlichen Mosaiken bzw. den vollständigen lokal endlichen Mosaiken konzentriert ist. Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Konstruktion zweier solcher zufälligen Mosaik, die zusätzlich noch vollständig sind, also gewissermaßen den ganzen Raum überdecken. In Kapitel 5 betrachten wir dann im Gegenzug eines, das fast sicher Lücken, also Bereiche ohne Polytope realisiert.

4.1. Der Laguerresche Phasenraum

Der Phasenraum, den wir zur Konstruktion unserer vollständigen Mosaik benötigen, basiert auf dem messbaren Raum $(E = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(E))$ ¹. Der übliche dazu gehörige Phasenraum $(E, \mathcal{B}(E), \mathcal{B}_m(E))$, wobei $\mathcal{B}_m(E)$ die metrisch beschränkten Mengen von E sind, reicht für uns jedoch nicht aus. Wir werden ihn deswegen um zwei Konzepte erweitern.

Der erste Unterschied liegt in der Interpretation. So werten wir für $e = (q, g) \in E$ den Anteil $q \in \mathbb{R}^d$ als Ort und $g \in \mathbb{R}$ als *Marke*. Sogenannte markierte Punktprozesse werden z.B. in [SW00] ab Seite 88 betrachtet. Diese Marken können je nach Anwendung beispielsweise als Radien von Kugeln mit Mittelpunkt in der Ortskoordinate, als Gewicht eines Teilchens am entsprechenden Ort oder aber als Zeitkoordinate aufgefasst werden. Wir werden im Folgenden die Interpretation eines Gewichtes wählen, da dies zur Veranschaulichung verschiedener Begriffe hilfreich ist. Wir wollen auch negative Gewichte zulassen.

Der zweite Unterschied liegt in der Wahl der beschränkten Mengen. Diese hat große Auswirkungen auf die möglichen lokal endlichen Maße und Punktprozesse.

Wir werden die euklidische Struktur samt der euklidischen Metrik aber nicht verwerfen, sondern das System $\mathcal{B}_m(E)$ der metrisch beschränkten Mengen in E lediglich erweitern.

Zunächst aber brauchen wir noch ein paar Vorbereitungen.

¹Hier sind wie üblich mit $\mathcal{B}(E)$ die Borelschen Mengen bezüglich der von der euklidischen Metrik erzeugten Topologie bezeichnet.

4. Zufällige vollständige Mosaike

Es seien

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{R}^d, \\ e = (\tilde{q}, \tilde{g}) &\longmapsto \tilde{q} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ e = (\tilde{q}, \tilde{g}) &\longmapsto \tilde{g} \end{aligned}$$

die jeweiligen Projektionen auf den Orts- bzw. Gewichts-Anteil eines Punktes in E .

Wir werden bei der Konstruktion der zufälligen Mosaike benötigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} T_q : \mathcal{M}(E) &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \\ \mu &\longmapsto q\mu \end{aligned}$$

messbar und wohldefiniert ist, d.h. insbesondere die Bilder lokal endlicher Maße unter q wieder lokal endlich sind. Dazu ist nach Korollar 1.3.17 (S. 22) erforderlich, dass die Mengen $A \times \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^2$ zu den beschränkten Mengen von E gehören. (Diese Mengen, wir wollen sie *Zylinder-Mengen* nennen, werden in Abbildung 4.1 veranschaulicht.) Wir hätten also gerne,

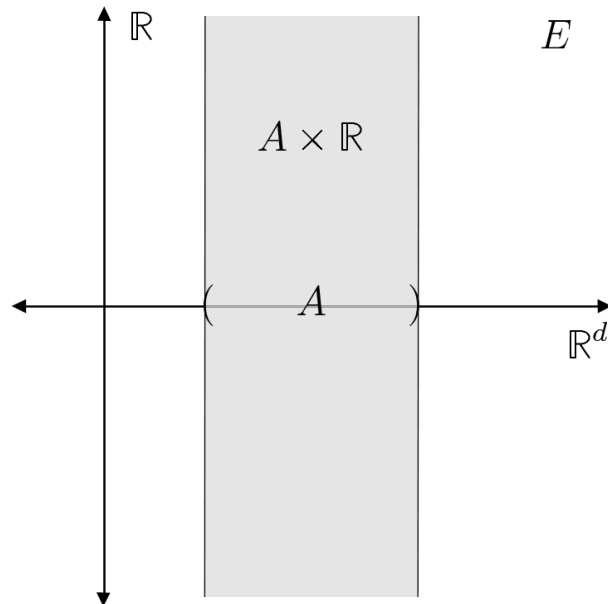


Abbildung 4.1.: Zylinder-Mengen $A \times \mathbb{R}$

²Hier sind mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die metrisch beschränkten Mengen des \mathbb{R}^d gemeint.

dass die Menge

$$\mathcal{B}_Z(E) = \left\{ B \subseteq E \mid \text{es existiert } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \text{ so dass } B \subseteq A \times \mathbb{R} \right\}$$

ein Teilsystem der beschränkten Mengen von E ist. Offensichtlich ist $\mathcal{B}_m(E) \subseteq \mathcal{B}_Z(E)$. Um ein wenig später Lemma 1.1.5 (S. 6) benutzen zu können, stellen wir fest:

Bemerkung 4.1.1. Das Tripel $(E, \mathcal{B}(E), \mathcal{B}_Z(E))$ ist ein Phasenraum.

Beweis. Da $\mathcal{B}_Z(E)$ die „üblichen beschränkten Mengen“ $\mathcal{B}_m(E)$ enthält, sind lediglich die Eigenschaften (B_1) , (B_2) und (B_4) (siehe Definition 1.1.1 auf Seite 3) zu zeigen. Zu (B_1) : Sei $B \in \mathcal{B}_Z(E)$ und $C \subseteq B$. Es existiert nach Definition $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, so dass $B \subseteq A \times \mathbb{R}$. Aber dann ist $C \subseteq B \subseteq A \times \mathbb{R}^d$ und damit gilt $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Zu (B_2) : Sind $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_Z(E)$, $B_1 \subseteq A_1 \times \mathbb{R}$, $B_2 \subseteq A_2 \times \mathbb{R}$ mit $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, dann ist $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, da $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ein Phasenraum ist. Aber dann haben wir $B_1 \cup B_2 \subseteq (A_1 \cup A_2) \times \mathbb{R}$ und somit $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}_Z(E)$.

Zu (B_4) : Dies ergibt sich daraus, dass für kompakte Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ die Mengen $K \times \mathbb{R}$ abgeschlossen sind und abgeschlossene Mengen Borelmengen sind. Außerdem gibt es zu jeder beschränkten Menge (in \mathbb{R}^d) eine kompakte Menge, in der diese enthalten ist. \square

Nun betrachten wir folgende symmetrische Form auf $E \times E$:

$$\begin{aligned} s : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (e, f) &\longmapsto (q(e) - q(f))^2 - (g(e) + g(f)). \end{aligned}$$

Diese Form ist offensichtlich keine Metrik, da sie nicht positiv ist. Wir stellen jedoch fest, dass

$$s((q_1, 0), (q_2, 0)) = (d(q_1, q_2))^2,$$

wobei d die euklidische Metrik in \mathbb{R}^d bezeichne. Eingeschränkt auf $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ entspricht s also der euklidischen Metrik, da das Quadrieren positiver Zahlen eine monoton wachsende Funktion ist. Und diese Form wird für uns auch die Aufgabe eines Abstandsbegriffes übernehmen. Die Stetigkeit von Skalarprodukt und den beteiligten Projektionen sichert die Messbarkeit der Abbildung s .

Diese Abbildung hilft uns auch bei der Definition der noch fehlenden beschränkten Mengen. Wir definieren den *Paraboloid zu einem Punkt* $f \in E$ vermöge

$$p(f) := \{e \in E \mid s(e, f) \leq 0\}.$$

(Siehe Abbildung 4.2.) Sowohl die symmetrische Form als auch die Notwendigkeit dieser wei-

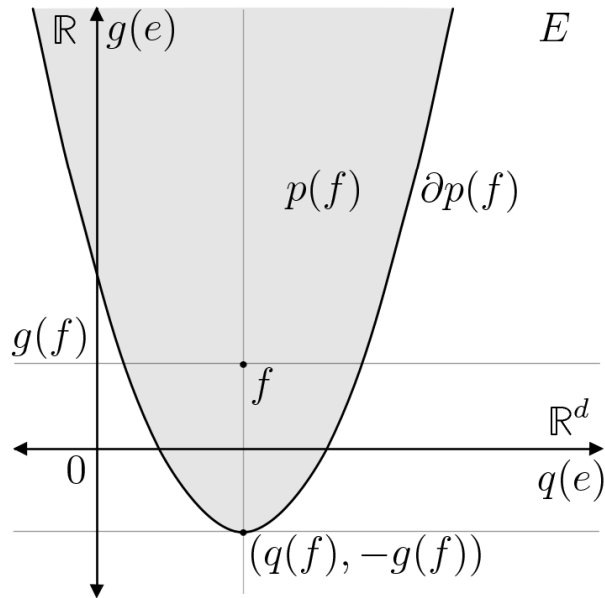


Abbildung 4.2.: Der Paraboloid zu einem Punkt $f \in E = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}$

teren beschränkten Mengen ist inspiriert durch [Sch93a]. Die Bezeichnung „Paraboloid“ verdankt $p(f)$ der Tatsache, dass der Rand $\partial p(f)$ die Form

$$\begin{aligned} \partial p(f) &= \{e \in E \mid s(e, f) = 0\} \\ &= \left\{ e \in E \mid g(e) = (q(e) - q(f))^2 - g(f) \right\} \end{aligned}$$

hat. Für $d = 1$ ist der Rand somit eine einfache, nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt in $(q(f), -g(f))$. Ebenso leicht sieht man, dass $p(f) \cap (\mathbb{R}^d \times \{g\})$ für $g > -g(f)$ eine d -dimensionale Kugel mit Radius $\sqrt{g(f) + g}$ und Mittelpunkt $(q(f), g)$ ist.

Wir möchten, dass diese Paraboloiden zu unseren beschränkten Mengen gehören. Es sei deshalb

$$\mathcal{B}_P(E) = \left\{ B \subseteq E \mid \text{es existieren } n \in \mathbb{N} \text{ und } f_1, \dots, f_n \in E, \text{ so dass } B \subseteq \bigcup_{i=1}^n p(f_i) \right\}.$$

Zunächst stellen wir fest:

Bemerkung 4.1.2. Es ist $\mathcal{B}_m(E) \subseteq \mathcal{B}_P(E)$.

Beweis. Wir müssen lediglich zeigen, dass alle Kugeln mit endlichem Radius in $\mathcal{B}_P(E)$ enthalten sind. Sei also $B_r(a)$, $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in E$ eine beliebige Kugel in E . (Vergleiche Abbildung 4.3.) Sei nun

$$g > |a| + r + r^2 \tag{4.1}$$

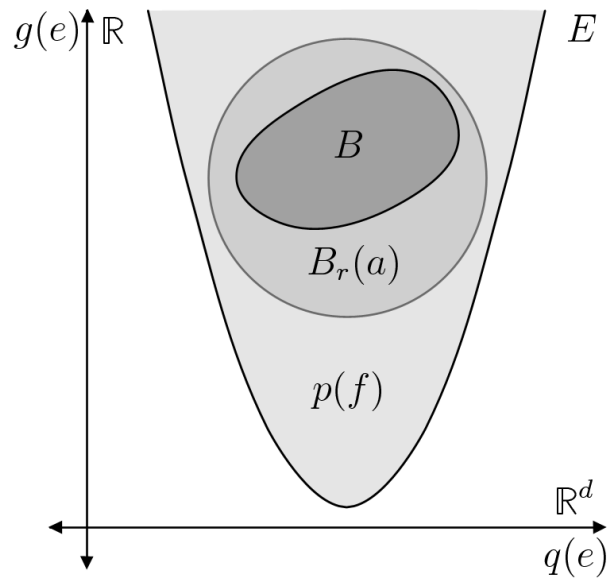


Abbildung 4.3.: Zu jeder metrisch beschränkten Menge B gibt es $f \in E$, so dass $B \subseteq p(f)$.

Dann ist $B_r(a) \subseteq p((q(a), g))$: Wir bemerken, dass für $e \in B_r(a)$ gilt, dass

$$|g(e)| \leq |a| + r \quad (4.2)$$

und damit

$$g > |g(e)| + r^2 \geq r^2 - g(e),$$

also

$$-r^2 > -(g + g(e)) \quad (4.3)$$

Es ist außerdem

$$e \in B_r(a) \iff d(a, e) \leq r \iff 0 \geq (a - e)^2 - r^2.$$

Aber dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\geq (a - e)^2 - r^2 \\ &= (q(a) - q(e))^2 + \overbrace{(g(a) - g(e))^2}^{\geq 0} - r^2 \\ &\geq (q(a) - q(e))^2 - r^2 \\ &\stackrel{(4.3)}{>} (q(a) - q(e))^2 - (g + g(e)) = s(e, (q(a), g)). \end{aligned}$$

Und damit wissen wir, dass $e \in p((q(a), g))$. □

4. Zufällige vollständige Mosaike

Damit haben wir einen weiteren Phasenraum:

Lemma 4.1.3. *Das Tripel $(E, \mathcal{B}(E), \mathcal{B}_P(E))$ ist ein Phasenraum.*

Beweis. Dank Bemerkung 4.1.2 brauchen wir wieder nur die Bedingungen (B_1) , (B_2) und (B_4) zu zeigen. Zu (B_1) : Es sei $B \in \mathcal{B}_P(E)$ und $C \subseteq B$. Dann gibt es nach Definition f_1, \dots, f_n mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n p(f_i)$. Aber dann gilt ebenfalls $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n p(f_i)$ und somit $C \in \mathcal{B}_P(E)$.

Zu (B_2) : Sind B_1 und B_2 in $\mathcal{B}_P(E)$, dann gibt es f_1, \dots, f_n und e_1, \dots, e_m , so dass $B_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^n p(f_i)$ und $B_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^m p(e_i)$. Sei $f_{n+j} := e_j$ für $j = 1, \dots, m$. Dann gilt

$$B_1 \cup B_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+m} p(f_i)$$

also $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}_P(E)$.

Die Eigenschaft (B_4) ergibt sich daraus, dass offensichtlich $p(f)$ für $f \in E$ abgeschlossen ist und somit Borelsch. \square

Lemma 1.1.5 (S. 6) liefert uns einen Phasenraum in dem sowohl die Zylindermengen als auch die Paraboloiden zu den beschränkten Mengen gehören: Es seien $\mathcal{B}_L := \mathcal{B}(\mathcal{B}_Z(E), \mathcal{B}_P(E))$, die durch die Systeme $\mathcal{B}_Z(E)$ und $\mathcal{B}_P(E)$ erzeugten beschränkten Mengen. Dann ist das Tripel $(E, \mathcal{B}(E), \mathcal{B}_L)$ ein Phasenraum, den wir als *Laguerreschen Phasenraum* bezeichnen wollen.

Bevor wir jedoch zu der Konstruktion der Mosaike kommen, wollen wir noch ein paar Überlegungen zu den lokal endlichen Maßen in diesem besonderen Phasenraum anstellen. Genauer: Wir wollen eine Klasse von Beispielen konstruieren.

Bemerkung 4.1.4. Es sei $\rho = z \cdot \lambda \otimes \tau$, wobei $z \in \mathbb{R}^+$, λ das Lebesgue-Maß in \mathbb{R}^d und τ ein endliches Maß in \mathbb{R} . Gilt

$$\int_{-g}^{+\infty} \lambda \left(B_{(g+t)^{1/2}}(0) \right) \tau(dt) < +\infty, \quad \forall g \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

dann ist $\rho \in \mathcal{M}(E)$.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass für $e, f \in E$ gilt, dass

$$e \in p(f) \Leftrightarrow s(e, f) \leq 0 \Leftrightarrow (q(e) - q(f))^2 - g(e) \leq g(f). \quad (4.5)$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 \rho(p(f)) &= \int_E 1_{p(f)}(e) \rho(de) \\
 &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} z \cdot 1_{p(f)}(q, t) \lambda(dq) \tau(dt) \\
 &\stackrel{(4.5)}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} z \cdot 1_{(-\infty, g(f)]} \left((q - q(f))^2 - t \right) \lambda(dq) \tau(dt) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} z \cdot 1_{(-\infty, g(f)+t]} \left((q - q(f))^2 \right) \lambda(dq) \tau(dt) \\
 &\stackrel{\lambda \text{ stationär}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} z \cdot 1_{(-\infty, g(f)+t]} (q^2) \lambda(dq) \tau(dt) \\
 &= \int_{-g(f)}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} z \cdot 1_{(0, g(f)+t]} (|q|^2) \lambda(dq) \tau(dt) \\
 &= \int_{-g(f)}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} z \cdot 1_{(0, (g(f)+t)^{1/2}]} (|q|) \lambda(dq) \tau(dt) \\
 &= \int_{-g(f)}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} z \cdot 1_{B_{(g(f)+t)^{1/2}}(0)}(q) \lambda(dq) \tau(dt) \\
 &= z \cdot \int_{-g(f)}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda \left(B_{(g(f)+t)^{1/2}}(0) \right) \tau(dt) \\
 &\stackrel{(4.4)}{<} +\infty.
 \end{aligned}$$

Ist nun $B \in \mathcal{B}_L$ messbar, so gibt es $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ und $n, \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in E$, so dass $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n p(f_i) \cup (C \times \mathbb{R})$. Aber dann gilt

$$\rho(B) \leq \sum_{i=1}^n \rho(p(f_i)) + z \cdot \lambda(C) \tau(\mathbb{R}) < +\infty$$

nach obiger Berechnung und da τ ein endliches Maß ist. Und damit ist ρ lokal endlich. \square

Da das Lebesgue-Maß einer d -dimensionalen Kugel in \mathbb{R}^d mit Radius r gegeben ist durch

$$\lambda(B_r(0)) = \alpha_d r^d,$$

wobei $\alpha_d \in \mathbb{R}^+$ eine dimensionsabhängige Konstante ist (siehe [Bau92], S. 165). Damit ist die Bedingung (4.4) an τ gleichbedeutend mit

$$\int_{-g}^{+\infty} (g+t)^{d/2} \tau(dt) < +\infty, \quad \forall g \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Wir wollen einige Beispiele für solche Maße τ betrachten, die die Bedingung (4.4) erfüllen:

4. Zufällige vollständige Mosaike

Beispiele 4.1.5. (i) Ist $\tau \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ konzentriert auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, dann erfüllt es (4.4): Es sei $s := \sup_{t \in I} t$ und $g \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\int_{-g}^{+\infty} (g+t)^{d/2} \tau(dt) \leq \int_{-g}^{+\infty} (g+s)^{d/2} \tau(dt) \leq (g+s)^{d/2} \cdot \tau(\mathbb{R}) < +\infty,$$

da τ ein endliches Maß ist und das Lebesgue-Maß lokal endlich.

(ii) Angenommen τ besitzt eine Dichte f bezüglich des eindimensionalen Lebesgue-Maßes λ^1 . Dann muss die Dichte $f(t)$ „schnell genug fallen, für $t \rightarrow +\infty$ “, d.h.,

$$\int_{-g}^{+\infty} (g+t)^{d/2} f(t) \lambda^1(dt) < +\infty, \quad \forall g \in \mathbb{R},$$

was zum Beispiel für exponentiell fallende Dichten der Fall ist. Solche wären z.B. durch die Exponential- oder Gauß-Verteilung gegeben.

(iii) Ist $\tau = \delta_{t_1} + \dots + \delta_{t_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ so ist dies ein Spezialfall von (i), der für uns im Fall $n = 1$ besonders interessant sein wird.

Abschließend bemerken wir noch, dass auch für unseren Phasenraum $(E, \mathcal{B}(E), \mathcal{B}_L)$ die Konstruktion des Phasenraums $(\mathcal{M}_f(E), \mathcal{F}_f(E), \mathcal{B}(\mathcal{M}_f(E)))$ keine Probleme bereitet, da \mathcal{B}_L lediglich eine Erweiterung der metrisch beschränkten Mengen darstellt.

4.2. Laguerresche zufällige Mosaike

In diesem Abschnitt soll aufbauend auf den rein geometrisch orientierten Überlegungen in [Sch93a], Seiten 51ff, ein zufälliges Mosaik konstruiert werden, das fast sicher vollständig ist. Dies wird mit Hilfe von Cluster-Eigenschaften und eines Poissonschen Punktprozesses erreicht, der „die Zentren“ der Polytope produziert. Außerdem wird gezeigt, dass auch die so genannte duale Konfiguration ein solches Mosaik bildet, so dass wir mit einer geeigneten Abbildung ein zweites vollständiges zufälliges Mosaik erhalten.

4.2.1. Laguerresche Mosaike

Die so genannten³ Laguerreschen Bereiche, die die Polytope in unserem zufälligen Mosaik bilden werden, kann man als Verallgemeinerung⁴ von den bekannten Voronoi-Bereichen anse-

³Die Bezeichnung „Laguerresche Bereiche“ ist ebenfalls [Sch93a] entnommen. Es finden sich aber auch die Bezeichnung „power cell“, zum Beispiel in [Aur87]. Nach diesem Artikel ist auch der Begriff „Dirichlet cell“ gebräuchlich.

⁴Diese Arbeit wird die Art der Verallgemeinerung noch konkretisieren.

hen, wie sie z.B. in [SW00] behandelt werden. Anwendungen in der Analyse und Simulation von Granulaten finden sich z.B. in [FLM00].

Der zugrunde liegende Phasenraum ist der im vorangegangenen Abschnitt konstruierte $(E, \mathcal{B}(E), \mathcal{B}_L)$. Insbesondere bedeutet dann $\eta \in \mathcal{M}(E)$ auch, dass η endliche Werte auf den Zylinder-Mengen und den Paraboloiden annimmt. Im Gegensatz dazu bleiben wir bei den diskreten konvexen Polytopen, die die Elemente unserer Mosaik bilden im üblichen Phasenraum zu \mathbb{R}^d , das heißt, wir versehen ihn mit der Borel- σ -Algebra bezüglich der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie. Als beschränkte Mengen gelten in \mathbb{R}^d die metrisch beschränkten Mengen. Und auf dieser Basis ist dann auch der Phasenraum $(\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d), \mathcal{F}_f(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ gebildet.

Den nächsten Begriff könnte man als den Einflussbereich eines einzelnen Punktes e in einer gegebenen Konfiguration $\eta \in \mathcal{M}(E)$ deuten.

Definition 4.2.1. Es sei $\eta \in \mathcal{M}(E)$. Dann heißt für $e \in \eta$

$$L_\eta(e) := \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid (v - q(e))^2 - g(e) \leq (v - q(e'))^2 - g(e'), \forall e' \in \eta \right\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

der zu e in η gehörige Laguerresche Bereich. (Zur Veranschaulichung siehe Abbildung 4.4.) Wir nennen dann e das Zentrum des Laguerreschen Bereichs $L_\eta(e)$.

Wollen wir den Laguerreschen Bereich mit der im vorigen Abschnitt definierten symmetrischen Form auf $s : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ (siehe Seite 51) in Verbindung bringen, so stellen wir fest, dass

$$L_\eta(e) = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid s(e, (v, 0)) \leq s(e', (v, 0)), \forall e' \in \eta \right\} .$$

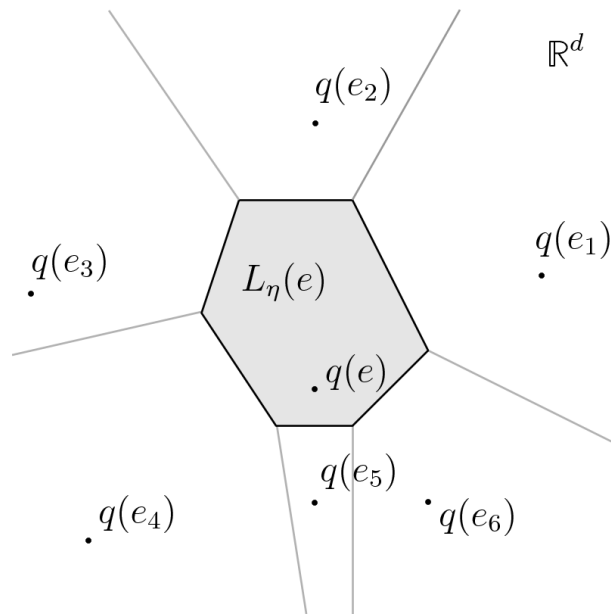
Da wir bei der Konstruktion der passenden beschränkten Mengen schon gesehen haben, dass die Form s eine enge Beziehung zu der euklidischen Metrik in \mathbb{R}^d besitzt, fällt die folgende Beobachtung leicht:

Bemerkung 4.2.2. Ist $\eta \in \mathcal{M}(E)$ derart, dass alle Gewichte der Punkte in η gleich sind, gilt also $g(e) = g$, für alle $e \in \eta$, $g \in \mathbb{R}$, dann entsprechen die Laguerreschen Bereiche $L_\eta(e)$ genau den Voronoi-Zellen⁵ $V_\mu(q(e))$ von $\mu = q(\eta)$ mit Zentrum $q = q(e)$, wobei

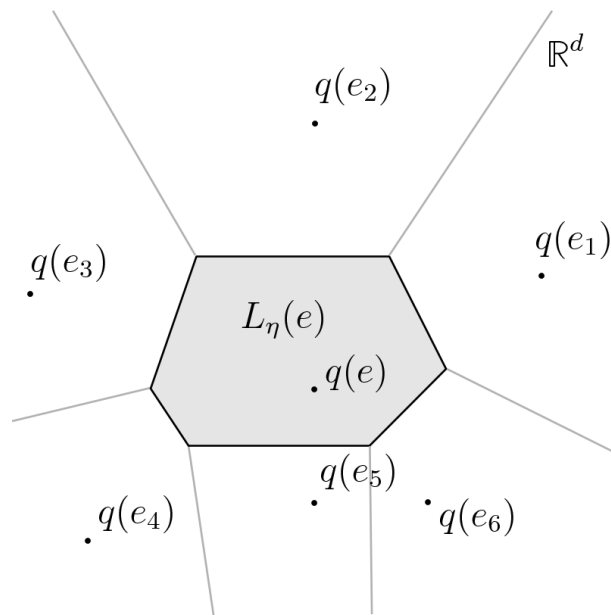
$$V_\mu(q) := \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid d(v, q) \leq d(v, q'), \forall q' \in \mu \right\} .$$

Die Voronoi-Zelle zu einem Punkt v einer Konfiguration besteht eben aus allen Punkten die näher an v liegen als zu irgendeinem anderen Punkt der Konfiguration. Die Laguerreschen Bereiche erweitern diesen Begriff, indem sie eine Verzerrung der Euklidischen Metrik

⁵Zur Definition einer Voronoi-Zelle vergleiche z.B. [Sch93a] S. 52.



(a) unterschiedliche Gewichte $g(e_1), \dots, g(e_6), g(e)$



(b) gleiche Gewichte $g(e_1) = \dots = g(e_6) = g(e)$, der Voronoische Fall

Abbildung 4.4.: Verschiedene Ausprägungen eines Laguerreschen Bereiches bei unterschiedlichen Gewichten aber gleichen Ortskoordinaten der Punkte in η

durch Gewichtung der Punkte erlauben. (Eine noch größere Verallgemeinerung, die auch die Laguerreschen Bereiche einschließt findet sich in [McM94]⁶.)

Das Zentrum einer Voronoi-Zelle ist immer in der Voronoi-Zelle enthalten. Die Ortskoordinate des Zentrums eines Laguerreschen Bereiches liegt jedoch nur dann immer auch darin, wenn im Vergleich zu den quadratischen Orts-Unterschieden „benachbarter Punkte“ die Gewichte des Nachbarn nicht zu groß sind. Genauer: sind $e, e' \in \eta$, dann ist eine notwendige Bedingung dafür, dass $q(e) \in L_\eta(e)$, die folgende:

$$(q(e) - q(e'))^2 - g(e) \leq (q(e) - q(e'))^2 - g(e'),$$

d.h.

$$g(e') - g(e) \leq (q(e) - q(e'))^2.$$

Ebenso kann es passieren, dass der Laguerresche Bereich $L_\eta(e)$ zu einem Punkt $e \in \eta$ leer ist.

Unter bestimmten Anforderungen an $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ bilden Voronoi-Zellen so klassische konvexe Polytope, deren Vereinigung den \mathbb{R}^d überdecken (siehe [SW00] S. 255ff). Ein Ausschnitt eines typischen Voronoi-Mosaiks (und damit eines speziellen Laguerre-Mosaiks) ist in Abbildung 4.5 dargestellt.

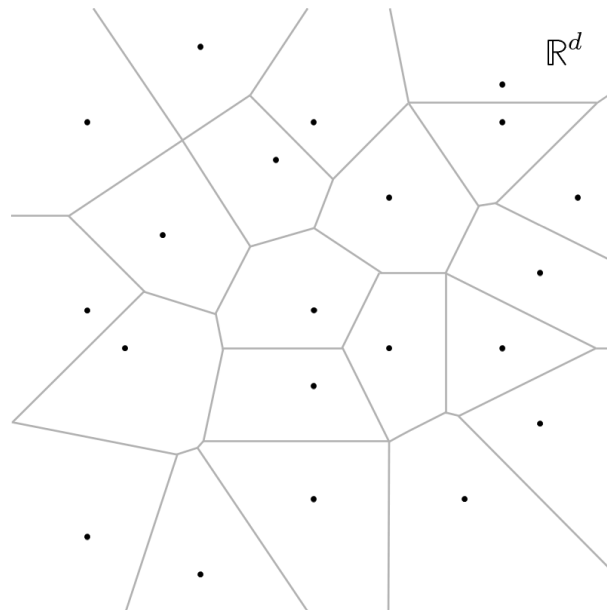


Abbildung 4.5.: Ein Voronoi-Mosaik, d.h. ein Laguerre-Mosaik bei gleichen Gewichten

In der Arbeit [Sch93a] werden zwei Forderungen an die Punktfigurationen η gestellt,

⁶Wie man leicht einsieht, stehen die Verbindungslinien der Ortskoordinaten der Zentren zweier benachbarter Zellen senkrecht zu den Schnittmengen der Zellen.

4. Zufällige vollständige Mosaike

damit die Konstruktion eines Mosaiks durch Laguerresche Bereiche funktioniert. Die erste davon haben wir bereits durch die Wahl unserer beschränkten Mengen erfüllt.

Bemerkung 4.2.3. Ist $\eta \in \mathcal{M}(E)$, dann gilt:

(L_1) Für alle $q \in \mathbb{R}^d$ und alle $g \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{card} \{e \in \eta \mid (q - q(e))^2 - g(e) \leq g\} < +\infty. \quad (4.7)$$

Beweis. Hier gibt es nichts zu zeigen, denn für $f = (q, g)$, wobei $q \in \mathbb{R}^d$, $g \in \mathbb{R}$, ist

$$\text{card} \{e \in \eta \mid (q - q(e))^2 - g(e) \leq g\} = \eta(p(f)) < +\infty,$$

da η lokal endlich ist und $p(f) \in \mathcal{B}_L$. □

Die Erweiterung der metrisch beschränkten Mengen ist dabei notwendig, da sonst zum Beispiel für $d = 1$ das Punktmaß $\eta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{(n, (n+1)^2)}$ endlich auf metrisch beschränkten Mengen, aber eben $\eta(p(f)) = +\infty$ für $f = (0, 0) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}$ gewesen wäre.

Die zweite Bedingung an η , die wir für die Konstruktion eines *vollständigen lokal endlichen* Mosaiks noch benötigen, fassen wir in folgende Definition:

Definition 4.2.4. Ein $\eta \in \mathcal{M}(E)$ heiße *Laguerresches Punktmaß* oder einfach *regulär*, wenn

(L_2) für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ und alle $u \in \mathbb{Q}^d$ gilt, dass $q(\eta)(H^+(\alpha, u)) > 0$,

wobei

$$H^+(\alpha, u) = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid v \cdot u \geq \alpha \right\}.$$

Die Menge der Laguerreschen Punktmaße sei mit \mathcal{L} bezeichnet.

Natürlich gilt für $\eta \in \mathcal{L}$ auch $q(\eta)(H^-(\alpha, u)) > 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ und alle $u \in \mathbb{Q}^d$,

$$H^-(\alpha, u) = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid v \cdot u \leq \alpha \right\},$$

da $H^-(\alpha, u) = H^+(-\alpha, -u)$.

In [Sch93a] wird sogar gefordert, dass die Punktkonfigurationen in *jedem* Halbraum mindestens einen Punkt besitzen müssen. Es ist nicht ausgeschlossen, dass sich diese Forderung und (L_2) entsprechen. Aber auf jeden Fall reichen für unsere Überlegungen diese abzählbar vielen Halbräume aus. Die Abzählbarkeit hilft uns bei dem Nachweis der Messbarkeit von \mathcal{L} . Diese wird in Abschnitt 4.2.2 gezeigt werden.

Die Bedingung (L_1), die zu der Erweiterung unserer beschränkten Mengen geführt hat, ist technischer Natur. Sie stellt die Weichen dafür, dass die notwendigen Beweise funktionieren.

Bei (L_2) handelt es sich um eine natürlichere Forderung: Wie wir sehen werden, handelt es sich bei den Laguerreschen Bereichen um konvexe Polytope, insbesondere also um beschränkte Mengen. Man kann nicht erwarten, dass man aus solchen Mengen eine Überdeckung von \mathbb{R}^d konstruieren kann, wenn in zu großen Raumbereichen keine Zentren liegen.

Für die Konstruktion eines Mosaiks ist es unerlässlich, dass die Zellen, in unserem Fall die Laguerreschen Bereiche, konvexe Polytope sind. Wir halten also fest:

Satz 4.2.5. *Ist $\eta \in \mathcal{L}$, dann ist für alle $e \in \eta$ der Laguerresche Bereich $L_\eta(e)$ ein konvexes Polytop im klassischen Sinne.*

Bevor wir diesen Satz beweisen können brauchen wir noch das folgende Lemma:

Lemma 4.2.6. *Seien $B \subseteq \mathbb{R}^d$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und sei $\eta \in \mathcal{M}(E)$. Dann gilt*

$$\eta \left(\bigcup_{f \in B \times I} p(f) \right) < +\infty. \quad (4.8)$$

Beweis. Sei $g = \sup I$. Dann reicht es für die Gleichung (4.8) zu zeigen, dass es nur endlich viele $e \in \eta$ gibt, so dass

$$(v - q(e))^2 - g(e) \leq g \quad (4.9)$$

für mindestens ein $v \in B$. Angenommen es gibt unendlich viele $e \in \eta$, die (4.9) für mindestens ein $v \in B$ erfüllen. Dann gibt es eine Folge $(e_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $e_n \in \eta$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit $e_n \neq e_m$ für $n \neq m$ und $v_n \in B$ mit

$$(v_n - q(e_n))^2 - g(e_n) \leq g.$$

Da jede Folge in einem Kompaktum eine konvergente Teilfolge besitzt und jede Beschränkte Menge im \mathbb{R}^d in einem Kompaktum enthalten ist, können wir per eventuellem Übergang zu einer Teilfolge davon ausgehen, dass es ein $v_0 \in \mathbb{R}^d$ gibt mit

$$|v_n - v_0| \leq \frac{1}{2} \quad (4.10)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wieder per Übergang zu einer Teilfolge findet man ein $\hat{v} \in \mathbb{R}^d$, $|\hat{v}| = 1$, so dass

$$(v_0 - q(e_n)) \cdot \hat{v} \geq \frac{1}{2} |v_0 - q(e_n)|, \quad (4.11)$$

denn die Folge $\hat{v}_n := \frac{v_0 - q(e_n)}{|v_0 - q(e_n)|}$, $n \in \mathbb{N}$, liegt auf der kompakten Einheitssphäre, besitzt also eine konvergente Teilfolge $(\hat{v}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Ist \hat{v} der Limes dieser Teilfolge, so konvergiert $\hat{v}_{n_k} \cdot \hat{v}$ sogar gegen 1. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass es ein \hat{v} gibt, das (4.11) für

4. Zufällige vollständige Mosaike

alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& (v_0 - \hat{v} - q(e_n))^2 - g(e_n) \\
= & (v_0 - q(e_n))^2 - 2(v_0 - q(e_n)) \cdot \hat{v} + \hat{v}^2 - g(e_n) \\
\stackrel{(4.11)}{\leq} & (v_0 - q(e_n))^2 - |v_0 - q(e_n)| + 1 - g(e_n) \\
= & (v_0 - v_n + v_n - q(e_n))^2 - |v_0 - q(e_n)| + 1 - g(e_n) \\
= & (v_0 - v_n)^2 + 2(v_0 - v_n) \cdot (v_n - q(e_n)) + (v_n - q(e_n))^2 - |v_0 - q(e_n)| + 1 - g(e_n) \\
\stackrel{(4.9),(4.10)}{\leq} & \frac{1}{4} + 1 + g + 2(v_0 - v_n) \cdot (v_n - q(e_n)) - |v_0 - q(e_n)|,
\end{aligned}$$

also gilt nach der Ungleichung von Cauchy und Schwartz

$$\begin{aligned}
& (v_0 - \hat{v} - q(e_n))^2 - g(e_n) \\
\leq & \frac{5}{4} + g + 2|v_0 - v_n| |v_n - q(e_n)| - |v_0 - q(e_n)| \\
\stackrel{(4.10)}{\leq} & \frac{5}{4} + g + |v_n - q(e_n)| - |v_0 - q(e_n)| \\
\leq & \frac{5}{4} + g + |v_n - q(e_n) - v_0 + q(e_n)| \\
\leq & \frac{5}{4} + g + |v_n - v_0| \\
\stackrel{(4.10)}{\leq} & \frac{7}{4} + g.
\end{aligned}$$

D.h. für alle $e_n, n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung $(v_0 - \hat{v} - q(e_n))^2 - g(e_n) \leq \frac{7}{4} + g$. Aber das steht im Widerspruch zu $\eta \in \mathcal{M}(E)$. \square

Man könnte anhand dieses Lemmas nun Bemerkung 1.2.3 benutzen, um das System der beschränkten Mengen um die Klasse der Mengen $p(B \times I)$, B, I wie im Lemma, zu erweitern. Für unsere weiteren Überlegungen ist dies allerdings nicht relevant, und wir kommen nun zum

Beweis von Satz 4.2.5. Da die leere Menge trivialerweise ein konvexes Polytop ist, können wir nun o. B. d. A. davon ausgehen, dass wir nur nichtleere Laguerresche Bereiche betrachten.

Zuerst zeigen wir, dass Laguerresche Bereiche beschränkt sind: Seien $\eta \in \mathcal{L}$, $e \in \eta$ und $0 < \varepsilon < 1$. Sei weiterhin

$$S_\varepsilon := \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid |v| \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \right\}.$$

Ist nun $\hat{v} \in S_\varepsilon \cap \mathbb{Q}^d$, dann gibt es ein $e' \in \eta$, so dass

$$0 < \hat{v} \cdot (q(e') - q(e)).$$

Denn: Angenommen die Behauptung gilt nicht. D.h. für alle $e' \in \eta$ gilt $0 \geq \hat{v} \cdot (q(e') - q(e))$. Dann würde gelten

$$\hat{v} \cdot q(e) \geq \hat{v} \cdot q(e'), \quad \forall e' \in \eta,$$

also

$$\hat{v} \cdot q(e) + \varepsilon' > \hat{v} \cdot q(e'), \quad \forall e' \in \eta, \forall \varepsilon' > 0.$$

Aber dann gibt es $\varepsilon' > 0$, so dass $\alpha := \hat{v} \cdot q(e) + \varepsilon' \in \mathbb{Q}$ und

$$\alpha > \hat{v} \cdot q(e')$$

für alle $e' \in \eta$. Mit anderen Worten ist $q(\eta) (H^-(\alpha, \hat{v})) = 0$. Aber dieses steht im Widerspruch dazu, dass η der Bedingung (L_2) genügt.

Insbesondere gilt dann $q(e) \neq q(e')$. Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts in beiden Argumenten gibt es ein $\delta > 0$ und eine Umgebung $U(\hat{v})$ von \hat{v} , so dass für alle $\hat{v}' \in U(\hat{v})$ gilt, dass

$$\delta |q(e') - q(e)| < \hat{v}' \cdot (q(e') - q(e)). \quad (4.12)$$

Zu allen $\hat{v} \in S_\varepsilon \cap \mathbb{Q}^d$ existieren damit $e' \in \eta$, $\delta > 0$ und $U(\hat{v})$, so dass alle $\hat{v}' \in U(\hat{v})$ die Gleichung (4.12) erfüllen.

Es ist

$$\left\{ U(\hat{v}) \mid \hat{v} \in S_\varepsilon \cap \mathbb{Q}^d \right\}$$

eine offene Überdeckung von $S_\varepsilon \cap \mathbb{Q}^d$: Zu \hat{v} existiert $\hat{\varepsilon} > 0$ mit $\mathring{B}_{\hat{\varepsilon}}(\hat{v}) \subseteq B_{\hat{\varepsilon}}(\hat{v}) \subseteq U(\hat{v})$. Passt man δ in (4.12) an, so kann man ein festes $\hat{\varepsilon}$ für alle $\hat{v} \in S_\varepsilon \cap \mathbb{Q}^d$ wählen. Dann ist

$$\left\{ \mathring{B}_{\hat{\varepsilon}}(\hat{v}) \mid \hat{v} \in S_\varepsilon \cap \mathbb{Q}^d \right\}$$

eine Überdeckung von $S_\varepsilon \cap \mathbb{Q}^d$ und folglich

$$\left\{ B_{\hat{\varepsilon}}(\hat{v}) \mid \hat{v} \in S_\varepsilon \cap \mathbb{Q}^d \right\}$$

4. Zufällige vollständige Mosaike

eine Überdeckung von S_ε . Aber dann ist

$$\{U(\hat{v}) \mid \hat{v} \in S_\varepsilon \cap \mathbb{Q}^d\}$$

eine offene Überdeckung von $S^{d-1}(\mathbb{R}^d)$, da $S^{d-1}(\mathbb{R}^d) \subseteq S_\varepsilon$.

Sei $S'_\varepsilon := \{\hat{v} \in S_\varepsilon \cap \mathbb{Q}^d \mid U(\hat{v}) \cap S^{d-1} \neq \emptyset\}$, dann ist auch $\{U(\hat{v}) \mid \hat{v} \in S'_\varepsilon\}$ eine offene Überdeckung von $S^{d-1}(\mathbb{R}^d)$. Da $S^{d-1}(\mathbb{R}^d)$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}$ und $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m \in S'_\varepsilon$, so dass schon die Umgebungen $U(\hat{v}_1), \dots, U(\hat{v}_m)$ die Sphäre $S^{d-1}(\mathbb{R}^d)$ überdecken.

Wir werden nun ausnutzen, dass sich jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^d$ in der Form $v = q(e) + \lambda \hat{v}'$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ und $\hat{v}' \in S^{d-1}(\mathbb{R}^d)$ schreiben lässt. (Siehe Abbildung 4.6.) Ist $\hat{v}' \in S^{d-1}(\mathbb{R}^d)$, dann

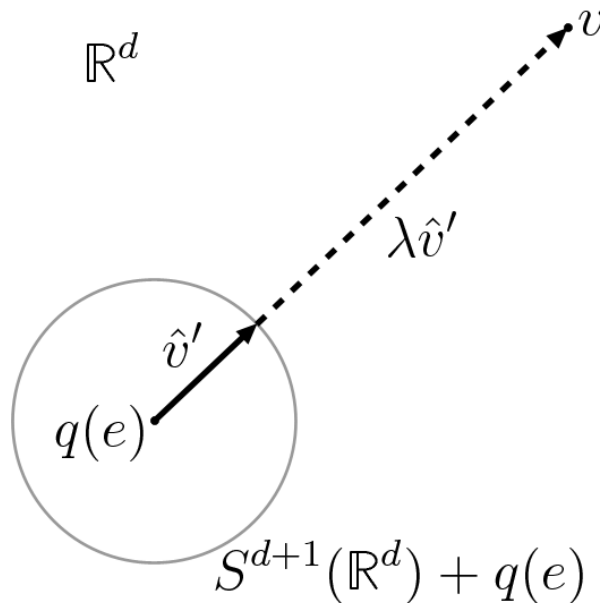


Abbildung 4.6.: Jeder Vektor in \mathbb{R}^d besitzt die Darstellung $v = q(e) + \lambda \hat{v}'$

gibt es $j \in \{1, \dots, m\}$, so dass $\hat{v}' \in S^{d-1}(\mathbb{R}^d) \cap U(\hat{v}_j)$, erfüllt also (4.12) für passende $e' \in \eta$

und $\delta > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 & v = q(e) + \lambda \hat{v}' \in L_\eta(e) \\
 \Rightarrow & (v - q(e))^2 - g(e) \leq (v - q(e'))^2 - g(e') \\
 \Leftrightarrow & (q(e) + \lambda \hat{v}' - q(e))^2 - g(e) \leq (q(e) + \lambda \hat{v}' - q(e'))^2 - g(e') \\
 \Leftrightarrow & (\lambda \hat{v}')^2 - g(e) \leq (q(e) - q(e'))^2 + 2\lambda \overbrace{(q(e) - q(e'))}^{=-(q(e')-q(e))} \cdot \hat{v}' + (\lambda \hat{v}')^2 - g(e') \\
 \Rightarrow & 0 \stackrel{(4.12)}{\leq} (q(e) - q(e'))^2 - 2\lambda \delta |q(e') - q(e)| + g(e) - g(e') \\
 \Leftrightarrow & \lambda \leq \frac{(q(e) - q(e'))^2 + g(e) - g(e')}{2\delta |q(e') - q(e)|} \\
 \Leftrightarrow & \lambda \leq \frac{|(q(e) - q(e'))^2 + g(e) - g(e')|}{2\delta |q(e') - q(e)|} =: \lambda_j. \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Besitzt also $v \in L_\eta(e)$ die Darstellung $v = q(e) + \lambda \hat{v}' \in L_\eta(e)$, $\hat{v}' \in U(\hat{v}_j) \cap S^{d-1}(\mathbb{R}^d)$, dann wissen wir, dass der positive skalare Faktor der Ungleichung $\lambda \leq \lambda_j$ entspricht. Damit ist für $\lambda_{\max} := \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ der Laguerresche Bereich $L_\eta(e)$ enthalten in der beschränkten Menge

$$\left\{ q(e) + \lambda \hat{v} \mid \hat{v} \in S^{d-1}(\mathbb{R}^d), \lambda \leq \lambda_{\max} \right\} = B_{\lambda_{\max}}(q(e)).$$

Somit ist auch $L_\eta(e)$ beschränkt. Die Abgeschlossenheit eines Laguerreschen Bereichs ist direkt aus der Definition ersichtlich.

Nun zeigen wir, dass Laguerresche Bereiche Polygone sind. Wir müssen also zeigen, dass sie Schnitte endlich vieler Halbräume sind. Sei also $\eta \in \mathcal{L}$ fixiert und $e \in \eta$ derart, dass $L_\eta(e) \neq \emptyset$.

Betrachte für $e' \in \eta$ die Menge

$$H^+(e', e) := \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid (v - q(e))^2 - g(e) \leq (v - q(e'))^2 - g(e') \right\}.$$

Dann ist $H^+(e', e)$ ein abgeschlossener Halbraum, denn (Erinnerung: wir können annehmen, dass $q(e) \neq q(e')$)

$$\begin{aligned}
 & (v - q(e))^2 - g(e) \leq (v - q(e'))^2 - g(e') \\
 \Leftrightarrow & v \cdot (q(e') - q(e)) \leq \frac{1}{2} (q(e')^2 - q(e)^2 + g(e) - g(e')).
 \end{aligned}$$

Somit hat $H^+(e', e)$ die Form wie sie in Kapitel 3 gefordert wurde.

Per Definitionem gilt nun

$$L_\eta(e) = \bigcap_{e' \in \eta} H^+(e', e).$$

Es bleibt also lediglich zu zeigen, dass schon der Schnitt über eine endliche Teilkonfiguration von η ausreicht.

Dazu: Wir wissen, dass $L_\eta(e)$ beschränkt ist. Somit existiert eine beschränkte offene Obermenge O von $L_\eta(e)$. Dann ist das Bild der Abbildung $O \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto (v - q(e))^2 - g(e)$ beschränkt, da die Abbildung stetig ist und der Abschluss von O kompakt. Sei r_0 eine obere Schranke dieser Abbildung. Es gilt also für alle $v \in O$

$$(v - q(e))^2 - g(e) \leq r_0. \quad (4.14)$$

Nach Lemma 4.2.6 gibt es also höchstens endlich viele e' mit $(v - q(e'))^2 - g(e') \leq r_0$ für wenigstens ein $v \in O$. Es sei $\tilde{\eta}$ die Menge dieser e' . Dann gilt

$$O \subseteq \bigcap_{e' \in \eta - \tilde{\eta}} H^+(e', e). \quad (4.15)$$

Dafür müssen wir zeigen, dass $O \subseteq H^+(e', e)$ für alle $e' \in \eta - \tilde{\eta}$. Sei also $e' \in \eta - \tilde{\eta}$. Dann gibt es kein $v \in O$, so dass $(v - q(e'))^2 - g(e') \leq r_0$ aufgrund der Konstruktion von $\tilde{\eta}$. Also für alle $v \in O$ nach (4.14)

$$(v - q(e))^2 - g(e) \leq r_0 < (v - q(e'))^2 - g(e').$$

Das heißt aber $v \in H^+(e', e)$.

Damit haben wir auch gezeigt, dass $L_\eta(e) = \bigcap_{e' \in \tilde{\eta}} H^+(e', e) \cap O$.

Nun sind sowohl $L_\eta(e)$ als auch $\bigcap_{e' \in \tilde{\eta}} H^+(e', e)$ abgeschlossen und konvex. Damit muss schon $L_\eta(e) = \bigcap_{e' \in \tilde{\eta}} H^+(e', e)$ gelten:

Angenommen

$$L_\eta(e) \neq \bigcap_{e' \in \tilde{\eta}} H^+(e', e)$$

Dann gibt es mindestens einen Punkt $u \in \bigcap_{e' \in \tilde{\eta}} H^+(e', e) \cap O^c$. Sei $v \in L_\eta(e)$ beliebig. Da $\bigcap_{e' \in \tilde{\eta}} H^+(e', e)$ konvex ist, liegt $\{\lambda v + (1 - \lambda)u \mid \lambda \in [0, 1]\}$ ganz darin. Sei $\lambda_0 := \sup\{\lambda \in [0, 1] \mid \lambda v + (1 - \lambda)u \in L_\eta(e)\}$. Wegen der Konvexität von $L_\eta(e)$ liegt dann ganz $\{\lambda v + (1 - \lambda)u \mid \lambda \in [0, \lambda_0]\}$ in diesem Laguerreschen Bereich. Und per Definition von λ_0 liegt $\{\lambda v + (1 - \lambda)u \mid \lambda \in (\lambda_0, 1]\}$ ganz in $\bigcap_{e' \in \tilde{\eta}} H^+(e', e) \cap O^c$. Nun sind aber sowohl $\bigcap_{e' \in \tilde{\eta}} H^+(e', e) \cap O^c$ als auch $L_\eta(e)$ abgeschlossen, weswegen $\lambda_0 v + (1 - \lambda_0)u$ in beiden Mengen liegen muss. Aber das ist nicht möglich, da diese beiden Mengen disjunkt sind.

Also ist $L_\eta(e)$ ein kompaktes Polygon, mit anderen Worten ein konvexes Polytop. \square

Nun definieren wir die Multi-Cluster-Eigenschaft $D_{\mathcal{L}}$, mit deren Hilfe wir das Mosaike konstruieren:

Für $(x, \eta) \in \mathcal{M}_f(E) \times \mathcal{M}(E)$ sei $(x, \eta) \in D_{\mathcal{L}}$ genau dann, wenn

(\mathcal{L}_1) $\eta \in \mathcal{L}$ und

(\mathcal{L}_2) $e \in \eta$ existiert, so dass $L_\eta(e) \neq \emptyset$ und $x = \sum_{q \in \text{vert } L_\eta(e)} \delta_{(q,0)}$.

Die Eigenschaft (\mathcal{L}_1) wurde ja bereits erläutert. Nach Bemerkung 3.1.9 und Satz 4.2.5 bedeutet (\mathcal{L}_2) nun, dass die Cluster zu η genau die diskreten Polytope zu den Laguerreschen Bereichen von η beschreiben. Das Gewicht 0 der Vertizes von x ist dabei willkürlich gewählt. Es sichert jedoch die Eindeutigkeit der Projektionen $q(x)$. Genauer: aus $(x, \eta), (y, \eta) \in D_{\mathcal{L}}$, $q(x) = q(y)$ folgt wegen (\mathcal{L}_2), dass $x = y$.

Wir werden im Abschnitt 4.3 über das duale Mosaik den Vertizes auch noch andere Gewichte zuordnen.

Nun stellen wir fest:

Lemma 4.2.7. *$D_{\mathcal{L}}$ ist eine Cluster-Eigenschaft.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{L} messbar ist: Ist $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Lokalisierung von \mathbb{R}^d so gilt,

$$\mathcal{L} = \bigcap_{\beta \in \mathbb{Q}} \bigcap_{u \in \mathbb{Q}^d} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ \eta \in \mathcal{M}(E) \mid q(\eta) (H^+(\beta, u) \cap B_n) > 0 \} .$$

Wegen der Abzählbarkeit der Mengen $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^d, \mathbb{N}$ brauchen wir nun nur noch die Messbarkeit der Mengen $\{ \eta \in \mathcal{M}(E) \mid q(\eta) (H^+(\beta, u) \cap B_n) > 0 \}$ zu zeigen. Aber es ist

$$\begin{aligned} & \{ \eta \in \mathcal{M}(E) \mid q(\eta) (H^+(\beta, u) \cap B_n) > 0 \} \\ &= q^{-1} \left(\left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \mid \mu (H^+(\beta, u) \cap B_n) > 0 \right\} \right) \\ &= q^{-1} \left(\left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \mid \zeta_{H^+(\beta, u) \cap B_n}(\mu) > 0 \right\} \right) , \end{aligned}$$

also messbar, da q eine messbare Abbildung ist und Halbräume Borelsche Mengen sind.

Zur Messbarkeit von Bedingung (\mathcal{L}_2): Da wir die Messbarkeit von \mathcal{L} gezeigt haben, gehen wir nun nur noch von $\eta \in \mathcal{L}$ aus. Dies impliziert insbesondere die Kompaktheit der Laguerreschen Bereiche.

Wir stellen nun fest, dass die Bedingung (\mathcal{L}_2) bedeutet, dass

(i) $g(f) = 0$ für alle $f \in x$ und

(ii) es existiert $e \in \eta$, so dass $q(x) = \text{vert } L_\eta(e)$.

Die Menge der $x \in \mathcal{M}_f(E)$, die (i) erfüllen ist messbar wegen der Messbarkeit der Projektions-Abbildung g .

4. Zufällige vollständige Mosaike

Kommen wir also nun zu (ii): Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der euklidischen Topologie von \mathbb{R}^d , also insbesondere ein Erzeugendensystem für die Borelsche σ -Algebra. Sei weiterhin

$$\mathcal{C} := \{(e, \eta) \in E \times \mathcal{L} \mid e \in \eta\}$$

(diese Menge ist messbar nach [KMM74], S. 107) und für $(e, \eta) \in \mathcal{L}$ sei

$$\mu(e, \eta) = \sum_{v \in \text{vert } L_\eta(e)} \delta_v.$$

Dann gilt

$$q(x) = \mu(e, \eta) \text{ für ein } e \in \eta \iff (q(x) - \mu(e, \eta))(B_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ für ein } e \in \eta, .$$

Nach [KMM74], S. 109, existiert eine messbare Indizierung $\mathcal{M} : (E) \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$, $(\eta, k) \mapsto (e_k, \eta)$, so dass $\eta = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_{e_k}$. Somit ist

$$\begin{aligned} & \{(x, \eta) \in \mathcal{M}_f(E) \times \mathcal{L} \mid (q(x) - \mu(e, \eta))(B_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ für ein } e \in \eta\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(x, \eta) \in \mathcal{M}_f(E) \times \mathcal{L} \mid (q(x) - \mu(e_k, \eta))(B_n) = 0\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Wegen Gleichung (4.16) reicht es nun zu zeigen, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathcal{M}_f(E) \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, e, \eta) &\longmapsto (q(x) - \mu(e, \eta))(B_n) \end{aligned}$$

messbar sind. Nun ist aber q messbar als Projektion. Nach [SW00], S. 236, ist ebenfalls die Abbildung, die einem konvexen Polytop (in unserem Fall $L_\eta(e)$) die Menge seiner Vertizes zuordnet, messbar. Diese Messbarkeit ist im Sinne der Spuren von $\sigma_{\mathcal{A}(E)}$, der Borel- σ -Algebra bzgl. der Matheron-Topologie auf der Menge $\mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ der abgeschlossenen Mengen in \mathbb{R}^d , in der Menge der konvexen Polytope bzw. der lokal endlichen Mengen zu verstehen. Ebenso ist nach [KMM74] die Abbildung, die einer lokal endlichen Menge A das einfache Zählmaß mit Träger A zuordnet, messbar. Damit bleibt lediglich zu zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^d), \\ (e, \eta) &\longmapsto L_\eta(E), \end{aligned}$$

messbar ist. Dies ist Inhalt von Bemerkung A.1.12. □

Wir können jetzt die Abbildung definieren, die uns, wie wir sehen werden, zu gegebenem

$\eta \in \mathcal{L}$ ein vollständiges lokal-endliches Mosaik produziert:

$$\begin{aligned} \varphi_{D_{\mathcal{L}}} : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{M} \left(\mathcal{M}_f \left(\mathbb{R}^d \right) \right) \\ \eta &\longmapsto \sum_{(x,\eta) \in D_{\mathcal{L}}} \delta_{q(x)}. \end{aligned}$$

Wir nennen $\varphi_{D_{\mathcal{L}}}$ auch die zu $D_{\mathcal{L}}$ gehörige Clusterfunktion.

Lemma 4.2.8. (i) $\varphi_{D_{\mathcal{L}}}$ ist wohldefiniert, d.h. für $\eta \in \mathcal{L}$ ist $\varphi_{D_{\mathcal{L}}}(\eta)$ lokal endlich.

(ii) $\varphi_{D_{\mathcal{L}}}$ ist messbar.

Beweis. Zu (i): Zunächst halten wir fest, dass wegen der lokalen Endlichkeit von η höchstens abzählbar viele Laguerresche Bereiche existieren und somit $\sum_{(x,\eta) \in D_{\mathcal{L}}} \delta_{q(x)}$ ein wohldefiniertes Objekt ist.

Nun zur lokalen Endlichkeit davon. Es reicht zu zeigen, dass jede beschränkte Menge nur mit endlich vielen Laguerreschen Bereichen einen nichtleeren Schnitt besitzt, da für $(x, \eta) \in D_{\mathcal{L}}$ die $q(x)$ gerade die Vertizes eines Laguerreschen Bereiches sind und somit für eine beschränkte Menge B und $\eta \in \mathcal{L}$

$$\text{card} \left\{ y \in \mathcal{X} \left(\mathbb{R}^d \right) \mid y \in \varphi_{D_{\mathcal{L}}}(\eta), y(B) \geq 1 \right\} \leq \text{card} \{ e \in \eta \mid L_{\eta}(e) \cap B \neq \emptyset \} .$$

Sei nun also $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, also eine metrisch beschränkte messbare Menge. Dann gibt es eine kompakte Menge K mit $B \subseteq K$ und daher

$$\text{card} \{ e \in \eta \mid L_{\eta}(e) \cap B \neq \emptyset \} \leq \text{card} \{ e \in \eta \mid L_{\eta}(e) \cap K \neq \emptyset \} .$$

Sei nun $e \in \eta$ beliebig aber fest. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} k : K &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ v &\longmapsto (v - q(e))^2 - g(e) \end{aligned}$$

stetig und daher $k(K)$ kompakt, also beschränkt. Sei r_0 eine obere Schranke von k . Dann gilt für alle $v \in K$

$$(v - q(e))^2 - g(e) \leq r_0. \quad (4.17)$$

Nach Lemma 4.2.6 können höchstens endlich viele $e' \in \eta$ die Gleichung $(v - q(e'))^2 - g(e') \leq r_0$ für ein $v \in K$ erfüllen. Es sei η' diese endliche Teilkonfiguration von η . Da aber (4.17) für alle $v \in K$ gilt, können nur die Laguerreschen Bereiche zu eben diesen endlich vielen e' die

Menge K schneiden: Sei $e \in \eta - \eta'$. Dann gilt für alle $v \in K$

$$(v - q(e))^2 - g(e) \leq r_0 < (v - q(e'))^2 - g(e').$$

Also ist $v \notin L_\eta(e')$ für alle $v \in K$.

Zu (ii): Dies ist die Aussage von Bemerkung A.1.13 auf Seite 109 im Anhang. \square

Damit kommen wir zu einem wichtigen Ergebnis:

Hauptlemma 4.2.9. *Sei $\eta \in \mathcal{L}$, dann ist $\varphi_{D_{\mathcal{L}}}(\eta)$ ein vollständiges lokal endliches Mosaik in \mathbb{R}^d .*

Beweis. Sei $\mu := \varphi_{D_{\mathcal{L}}}(\eta)$. Dank der Definition von $D_{\mathcal{L}}$ und der Eigenschaft, dass Laguerre-sche Bereiche konvexe Polytope sind, wissen wir schon, dass für $y \in \mu$ auch $y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ ist. Die lokale Endlichkeit haben wir bereits in Lemma 4.2.8 bewiesen.

Wir zeigen zunächst, dass $\bigcup_{y \in \mu} \langle y \rangle = \mathbb{R}^d$:

Es gilt wegen der Definition von $D_{\mathcal{L}}$, dass $\bigcup_{y \in \mu} \langle y \rangle = \bigcup_{e \in \eta} L_\eta(e)$. Es bleibt also zu zeigen, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^d$ ein $e \in \eta$ existiert, so dass $v \in L_\eta(e)$.

Sei also $v \in \mathbb{R}^d$ und $e' \in \eta$ beliebig. Dann gibt es nach (L_1) höchstens endlich viele $e \in \eta$, so dass

$$(q(e) - v)^2 - g(e) \leq (q(e') - v)^2 - g(e'). \quad (4.18)$$

Die Menge dieser e ist nicht leer, da e' selbst die Gleichung erfüllt. Somit gibt es ein $e \in \eta$, so dass die linke Seite der Ungleichung (4.18) ihr Minimum annimmt. Aber dann per Definitionem $v \in L_\eta(e)$.

Es bleibt zu zeigen, dass sich die diskreten Polytope in μ nur in ganzen Seiten schneiden: Seien also $y, y' \in \mu$, $y \neq y'$ dann gibt es $e, e' \in \eta$, $e \neq e'$ mit $\langle y \rangle = L_\eta(e)$ und $\langle y' \rangle = L_\eta(e')$. Gilt nun $\langle y \rangle \cap \langle y' \rangle \neq \emptyset$, dann eben auch $L_\eta(e) \cap L_\eta(e') \neq \emptyset$.

Sei

$$H(e', e) := \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid (q(e) - v)^2 - g(e) = (q(e') - v)^2 - g(e') \right\},$$

also die $H^+(e', e)$ begrenzende bzw. trennende Hyperebene. Dann gilt nach Definition von $L_\eta(e)$, $L_\eta(e')$, dass

$$L_\eta(e) \cap H(e', e) = L_\eta(e) \cap L_\eta(e') = L_\eta(e') \cap H(e', e)$$

und dass

$$L_\eta(e) \subseteq H^+(e', e)$$

bzw.

$$L_\eta(e') \subseteq H^+(e, e').$$

Das heißt, dass $H(e', e)$ eine Stützhyperebene beider Laguerrescher Bereiche ist. Damit ist der Schnitt der Bereiche eine Seite von beiden. Bemerkung 3.3.2 liefert dann $y \cap y' = H(e', e) \cap y = H(e', e) \cap y' =: z \neq \emptyset$ und $\langle y \rangle \cap \langle y' \rangle = \langle z \rangle$, da y und y' die Konfigurationen aus den Extrempunkten der entsprechenden Laguerreschen Bereiche sind. \square

4.2.2. Der Poisson-Laguerre-Prozess

In diesem Abschnitt sollen nun in einem erweiterten Sinn Wahrscheinlichkeiten auf $\mathbb{M}_v(\mathbb{R}^d)$ konstruiert werden. Das Hauptlemma 4.2.9 liefert uns sofort folgendes Ergebnis:

Lemma 4.2.10. *Sei P ein Punktprozess in $E = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ mit $P(\mathcal{L}) = 1$. Sei weiter $M \in \mathcal{F}(\mathcal{M}_f(E))$ eine messbare Menge, die $\mathbb{M}_v(E)$ enthält. Dann gilt für das Bild $Q_{\mathcal{L}}$ von P unter $\varphi_{D_{\mathcal{L}}}$*

$$Q_{\mathcal{L}}(M) = 1. \quad (4.19)$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{L}}(M) &= \int_{\mathcal{M}(\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d))} 1_M(\mu) Q_{\mathcal{L}}(d\mu) \\ &\stackrel{\text{Transformationssatz}}{=} \int_{\mathcal{M}(E)} 1_M(\varphi_{D_{\mathcal{L}}}(\eta)) P(d\eta) \\ &\stackrel{\text{Hauptlemma 4.2.9}}{=} 1, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. \square

Ein in der Art dieses Lemmas gebildetes zufälliges vollständiges Mosaik $Q_{\mathcal{L}}$ bezeichnen wir als *zufälliges Laguerresches Mosaik*.

Mit einem recht einfachen Beispiel können wir zeigen, dass die Menge der Punktprozesse, die die Voraussetzungen des Lemmas 4.2.10 erfüllen, nicht leer ist:

Satz 4.2.11. *Sei $\rho := z\lambda^d \otimes \tau$, wobei λ^d das Lebesgue-Maß in \mathbb{R}^d ist und τ ein endliches Maß auf \mathbb{R} , das die Bedingung (4.4) erfüllt. Dann gilt für den Poisson-Punktprozess P_{ρ} mit Intensität ρ*

$$P_{\rho}(\mathcal{L}) = 1. \quad (4.20)$$

Beweis. Die Bedingung (4.4) sichert, dass $\rho \in \mathcal{M}(E)$ ist.

Dank der Definition von \mathcal{L} , reicht es nun zu zeigen, dass für alle Halbräume H^+ von \mathbb{R}^d gilt

$$P_{\rho}(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid q(\eta)(H^+) > 0\}) = 1. \quad (4.21)$$

4. Zufällige vollständige Mosaike

Sei H^+ ein beliebiger Halbraum des \mathbb{R}^d . Dann gibt es eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkter Mengen, so dass $B_n \uparrow H^+$, z.B. $B_n = H^+ \cap B'_n$, für eine Lokalisierung $(B'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Aber somit ist

$$\begin{aligned}
 & P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid q(\eta)(B_n) = 0\}) \\
 = & \int_{\mathcal{M}(E)} \mathbf{1}_{\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid q(\eta)(B_n) = 0\}}(\eta) P_\rho(d\eta) \\
 = & \int_{\mathcal{M}(E)} \mathbf{1}_{\{\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \mid \nu(B_n) = 0\}}(q(\eta)) P_\rho(d\eta) \\
 \stackrel{\text{Transformationssatz}}{=} & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \mathbf{1}_{\{\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \mid \nu(B_n) = 0\}}(\nu) P_\rho \circ q^{-1}(d\nu).
 \end{aligned}$$

Korollar 1.3.17 liefert uns dann

$$\begin{aligned}
 & P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid q(\eta)(B_n) = 0\}) \\
 = & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \mathbf{1}_{\{\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \mid \nu(B_n) = 0\}}(\nu) P_{z\tau(\mathbb{R})\lambda^d}(d\nu) \\
 = & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \mathbf{1}_{\{\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \mid \zeta_{B_n} = 0\}}(\nu) P_{z\tau(\mathbb{R})\lambda^d}(d\nu) \\
 = & e^{-z\tau(\mathbb{R})\lambda^d(B_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Aber damit ist $P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid q(\eta)(H^+) > 0\}) = 1$. □

Wir haben nun eines der Hauptziele der Arbeit erreicht:

Theorem 4.2.12. (Der Poisson-Laguerre-Prozess) *Das Bild von P_ρ , ρ wie in Satz 4.2.11, unter $\varphi_{D_\mathcal{Z}}$ ist ein zufälliges vollständiges Mosaik. Wir wollen es als Poisson-Laguerre-Prozess bezeichnen.*

In Bemerkung 4.2.2 hatten wir schon den Bezug zu Voronoi-Zellen hergestellt. Die hier entwickelte Theorie (Satz 4.2.11) gibt uns eben auch die Möglichkeit so genannte Voronoi-Mosaike zufällig zu realisieren:

Korollar 4.2.13. *Ist $\rho := z_1 \lambda^d \otimes z_2 \delta_r$, wobei λ^d das Lebesgue-Maß in \mathbb{R}^d ist und $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}$, ist weiterhin P_ρ der Poissonsche Punktprozess mit Intensität ρ , dann sind P_ρ -fast-sicher alle $\varphi_{D_\mathcal{Z}}(\eta) \in \mathcal{M}(\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d))$ vollständige lokal endliche Mosaike, bestehend aus den Voronoi-Zellen zu $q(\eta)$. (Dieses zufällige Mosaik sei mit Poisson-Voronoi-Prozess bezeichnet.)*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Bemerkung 4.2.2 und Theorem 4.2.12. □

4.3. Das zu einem Laguerreschen duale Mosaik

In Werken wie z.B. [SW00] wird ein duales zu einem Voronoi-Mosaik entwickelt, indem man die konvexe Hülle der Zentren „benachbarter“ Voronoi-Zellen betrachtet. Wir werden eine etwas andere Strategie verfolgen und die Vertizes der Laguerreschen Bereiche zusammen mit geeigneten Gewichten zu neuen Zentren Laguerrescher Bereiche machen. Angelehnt an die Ideen aus [Sch93a] werden wir aber trotzdem ähnliche Ergebnisse erhalten wie [SW00].

Man sieht direkt an der Definition eines Laguerreschen Bereichs, dass für $v \in L_\eta(e) \cap L_\eta(e')$, $e, e' \in \eta$ gilt, dass

$$(v - q(e))^2 - g(e) = (v - q(e'))^2 - g(e'). \quad (4.22)$$

Das gilt natürlich insbesondere für die Vertizes der Laguerreschen Bereiche, die üblicherweise in mehreren dieser Bereiche enthalten sind. Wenn man nun also einem Vertex das Gewicht eines der Laguerreschen Bereiche zuordnet, von denen er Vertex ist, dann ist diese Zuordnung wegen der Gleichheit (4.22) wohldefiniert.

Definitionen 4.3.1. Sei $\eta \in \mathcal{L}$. Das *duale Punktmaß* η^* zu η ist gegeben durch

$$\eta^* := \sum_{e^* \in \text{supp } \eta^*} \delta_{e^*},$$

wobei

$$\text{supp } \eta^* := \left\{ \left(q^*, (q^* - q(e))^2 - g(e) \right) \mid e \in \eta, q^* \text{ ist Vertex von } L_\eta(e) \right\} \subseteq E.$$

Weiter bezeichne

$$\begin{aligned} \text{dual} : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{M}(E), \\ \eta &\longmapsto \eta^* \end{aligned}$$

die Abbildung, die einem regulären Punktmaß sein duales zuordnet. (Vergleiche Abbildung 4.7.)

Bemerkung 4.3.2. Die Abbildung dual ist wohldefiniert, d.h. für $\eta \in \mathcal{L}$ ist $\eta^* \in \mathcal{M}(E)$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

- (i) $\eta^*(p(f)) < +\infty$ für alle $f \in E$ und dass
- (ii) für $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ gilt $\eta^*(B \times \mathbb{R}) < \infty$.

Zu (i): Diese Aussage ist äquivalent dazu, dass η^* die Bedingung (L_1) erfüllt. Entgegen der Behauptung nehmen wir an, dass η^* die Bedingung (L_1) nicht erfüllt.

4. Zufällige vollständige Mosaik

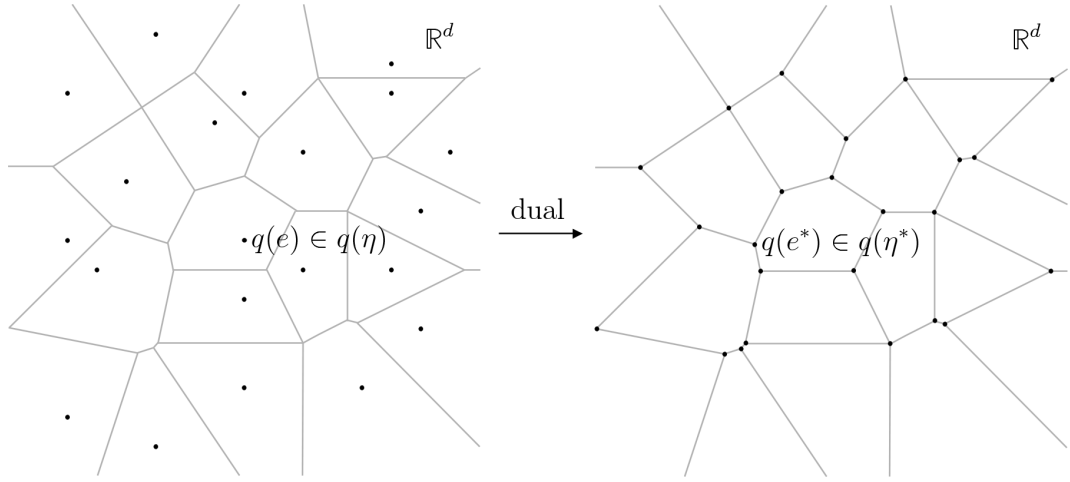


Abbildung 4.7.: Veranschaulichung der Abbildung dual anhand der Ortsprojektionen der entsprechenden Punktmaße

Dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}$, ein $v \in \mathbb{R}^d$ und eine Folge $(e_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_i^* \neq e_j^*$ für $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, so dass

$$(v - q(e_n^*))^2 - g(e_n^*) \leq r \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.23)$$

Aus der Definition von η^* folgt, dass $q(e^*) = q(\tilde{e}^*)$ impliziert, dass $g(e^*) = g(\tilde{e}^*)$ gilt, falls $e^*, \tilde{e}^* \in \eta^*$. Deswegen ist auch $q(e_i^*) \neq q(e_j^*)$ für $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Bei eventuellem Ausschluss eines Folgenglieds können wir somit annehmen, dass $q(e_n^*) \neq v$. Dann ist aber auch die Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v_n = \frac{q(e_n^*) - v}{|q(e_n^*) - v|}$ definiert und beschränkt, da $|v_n| = 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wir können damit zu einer konvergenten Teilfolge übergehen, behalten aber die Bezeichnungen bei. Es konvergiere $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\hat{v} \in S^{d-1}(\mathbb{R}^d)$.

Sei $\delta > 0$. Weil η die Bedingung (L_2) erfüllt, gibt es $e \in \eta$, so dass $\hat{v} \cdot (q(e) - v) > \delta$. Ist nun n groß genug, dann gilt auch $v_n \cdot (q(e) - v) > \delta$. Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{q(e_n^*) - v}{|q(e_n^*) - v|} \cdot (q(e) - v) &> \delta \\ \Leftrightarrow (q(e_n^*) - v) \cdot (q(e) - v) &> \delta |q(e_n^*) - v|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sei nun $q(e_n^*)$ ein Vertex von $L_\eta(e_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $g(e_n^*) = (q(e_n^*) - q(e_n))^2 - g(e_n)$. Weil $q(e_n^*) \in L_\eta(e_n)$, gilt dann auch

$$g(e_n^*) = (q(e_n^*) - q(e_n))^2 - g(e_n) \leq (q(e_n^*) - q(e))^2 - g(e). \quad (4.25)$$

Es gilt außerdem

$$\begin{aligned}
 & (q(e_n^*) - q(e))^2 - g(e) \\
 = & ((q(e_n^*) - v) - (q(e) - v))^2 - g(e) \\
 = & (q(e_n^*) - v)^2 - 2(q(e_n^*) - v) \cdot (q(e) - v) + (q(e) - v)^2 - g(e) \\
 \stackrel{(4.24)}{\leq} & (q(e_n^*) - v)^2 - 2\delta|q(e_n^*) - v| + (q(e) - v)^2 - g(e). \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}
 0 & \stackrel{(4.25),(4.26)}{\leq} (q(e_n^*) - v)^2 - g(e_n^*) - 2\delta|q(e_n^*) - v| + (q(e) - v)^2 - g(e) \\
 & \stackrel{(4.23)}{\leq} r - 2\delta|q(e_n^*) - v| + (q(e) - v)^2 - g(e).
 \end{aligned}$$

Aber dann gilt auch

$$|q(e_n^*) - v| \leq \frac{r - (q(e) - v)^2 - g(e)}{2\delta}.$$

Mit anderen Worten: Es liegen unendlich viele Vertizes von Laguerreschen Bereichen von η in einem beschränkten Bereich. Das widerspricht der lokalen Endlichkeit des Mosaiks der Laguerreschen Bereiche von η . Damit haben wir (i) gezeigt.

Nun zu (ii): Da $\varphi_{D_{\mathcal{L}}}(\eta)$ lokal endlich ist, gibt es

$$k = \sup \{y(B) \mid y \in \varphi_{D_{\mathcal{L}}}(\eta)\} \in \mathbb{N},$$

so dass

$$\eta^*(B \times \mathbb{R}) \leq k \cdot \varphi_{D_{\mathcal{L}}}(\eta)(\mathcal{F}_B) < +\infty. \tag{4.27}$$

Die erste Ungleichung in (4.27) gilt, da die $q^* \in q(\eta^*)$ gerade die Vertizes der Laguerreschen Bereiche von η sind: Soll also ein $e^* \in \eta^*$ in $B \times \mathbb{R}$ liegen, so muss es eben einen Vertex eines Laguerreschen Bereichs geben, der in B liegt. Und da dieser Bereich weniger als k Eckpunkte hat, kann es also auch nur höchstens k zu diesem Bereich gehörige e^* geben. Aber dann gilt eben (4.27). \square

Wir werden nun zeigen, dass es für ein Punktmaß reicht, regulär zu sein, damit das duale wieder regulär ist.

Satz 4.3.3. *Ist $\eta \in \mathcal{L}$, dann ist ebenfalls $\eta^* \in \mathcal{L}$. Weiterhin gilt für $e \in \eta$ mit $L_\eta(e) \neq \emptyset$, $\tilde{e}^* \in \eta^*$*

$$q(e) \in L_{\eta^*}(\tilde{e}^*) \iff q(\tilde{e}^*) \in L_\eta(e). \tag{4.28}$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

(i) η^* die Bedingung (L_2) erfüllt,

(ii) für $e \in \eta$ und $L_\eta(e) \neq \emptyset$, $\tilde{e}^* \in \eta^*$

$$q(e) \in L_{\eta^*}(\tilde{e}^*) \iff q(\tilde{e}^*) \in L_\eta(e)$$

gilt.

Wir zeigen zunächst (i): Die Laguerreschen Bereiche zu η sind nach Voraussetzung konvexe Polytope. Somit sind sie auch kompakt, insbesondere beschränkt. Da nach dem Hauptlemma 4.2.9 die Laguerreschen Bereiche \mathbb{R}^d überdecken und die $q(e^*)$, $e^* \in \eta^*$ gerade die Vertizes der Laguerreschen Bereiche von η sind, gilt trivialerweise auch (L_2) für η^* .

Zu (ii): Wir werden zeigen, dass unter den Voraussetzungen des Satzes

$$q(e) \in L_{\eta^*}(\tilde{e}^*) \iff g(e) + g(\tilde{e}^*) = (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2 \iff q(\tilde{e}^*) \in L_\eta(e).$$

Zunächst behandeln wir die Äquivalenz $(g(e) + g(\tilde{e}^*) = (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2 \iff q(\tilde{e}^*) \in L_\eta(e))$:

Sei $\tilde{e}^* \in \eta^*$. Dann gibt es $\tilde{e} \in \eta$, so dass $q(\tilde{e}^*)$ ein Vertex von $L_\eta(\tilde{e})$ ist. Nun ist insbesondere dann $q(\tilde{e}^*) \in L_\eta(\tilde{e})$ und somit für alle $e \in \eta$

$$(q(\tilde{e}) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(\tilde{e}) \leq (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(e). \quad (4.29)$$

Gleichheit in (4.29) gilt offensichtlich genau dann, wenn auch $q(\tilde{e}^*) \in L_\eta(e)$. In diesem Fall ist $g(\tilde{e}^*) = (q(\tilde{e}) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(\tilde{e})$, also auch $g(\tilde{e}) = (q(\tilde{e}) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(\tilde{e}^*)$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} & q(\tilde{e}^*) \in L_\eta(e) \\ \Leftrightarrow & (q(\tilde{e}) - q(\tilde{e}^*))^2 - (q(\tilde{e}) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(\tilde{e}^*) = (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(e) \\ \Leftrightarrow & g(e) + g(\tilde{e}^*) = (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2. \end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir zunächst $(q(e) \in L_{\eta^*}(\tilde{e}^*) \Rightarrow g(e) + g(\tilde{e}^*) = (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2)$: Sei also $q(e) \in L_{\eta^*}(\tilde{e}^*)$ mit $L_\eta(e) \neq \emptyset$. Dann gibt es $e^* \in \eta^*$, so dass $q(e^*)$ ein Vertex von $L_\eta(e)$ ist. Somit gilt

$$g(e^*) = (q(e) - q(e^*))^2 - g(e). \quad (4.30)$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} & (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(\tilde{e}^*) \leq (q(e) - q(e^*))^2 - g(e^*) \\ \stackrel{(4.30)}{\Leftrightarrow} & (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2 \leq g(e) + g(\tilde{e}^*). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sei nun \tilde{e}^* ein Vertex von $L_\eta(\tilde{e})$, dann gilt $g(\tilde{e}) = (q(\tilde{e}) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(\tilde{e}^*)$ und damit

$$\begin{aligned} (q(\tilde{e}) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(\tilde{e}) &\leq (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(e) \\ \Leftrightarrow g(e) + g(\tilde{e}^*) &\leq (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2. \end{aligned}$$

Um den Beweis abschließen zu können brauchen wir also nun nur noch zu zeigen, dass $g(e) + g(\tilde{e}^*) = (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2$ impliziert, dass $q(e) \in L_{\eta^*}(\tilde{e}^*)$:

Da η^* regulär ist, wissen wir, dass es ein $e_0^* \in \eta^*$ gibt, so dass $q(e) \in L_{\eta^*}(e_0^*)$. Nach der obigen Implikation gilt damit $g(e) + g(e_0^*) = (q(e) - q(e_0^*))^2$, also auch $g(e) = (q(e) - q(e_0^*))^2 - g(e_0^*)$. Aber nach Voraussetzung ist auch $g(e) = (q(e) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(\tilde{e}^*)$. Somit haben wir, weil $q(e) \in L_{\eta^*}(e_0^*)$ ist,

$$(q(e) - q(\tilde{e}^*))^2 - g(\tilde{e}^*) = g(e) = (q(e) - q(e_0^*))^2 - g(e_0^*) \leq (q(e) - q(e^*))^2 - g(e^*)$$

für alle $e^* \in \eta^*$. Aber dann ist $q(e) \in L_{\eta^*}(\tilde{e}^*)$, was zu zeigen war. \square

Korollar 4.3.4. Für $\eta \in \mathcal{L}$ ist $\varphi_{D_\varphi}(\eta^*)$ stets ein vollständiges lokal endliches Mosaik.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Satz 4.2.9 und der Bemerkung 4.3.3. \square

In [Sch93a] wird ebenfalls gezeigt⁷, dass $(\eta^*)^* = \sum_{e \in \eta, L_\eta(e) \neq \emptyset} \delta_e$. Das bedeutet, dass die Vertices der Laguerreschen Bereiche von η^* aus Punkten der ursprünglichen Konfiguration η bestehen. Damit sind im Voronoischen Fall $g(e) = g$, $g \in \mathbb{R}$ fest für alle $e \in \eta$, die Laguerreschen Bereiche der dualen Konfiguration genau die so genannten Delaunay-Zellen des Punktmaßes $\mu = q(\eta)$. Ist $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ und $q^* \in |V_\mu(q)$ für ein $q \in \mu$, dann ist die zu q^* gehörige *Delaunay-Zelle* gegeben durch

$$d_\mu(q^*) := \langle \{q \in \mu \mid q^* \in \text{vert } V_\mu(q)\} \rangle.$$

Nach dem bisher gezeigten wissen wir also, dass dann die Kollektion der zu den Delaunay-Zellen gehörigen diskreten Polytope eine vollständiges lokal endliches Mosaik bilden.

⁷Der Beweis dieser Aussage ist dort nur recht skizzenhaft angegeben, weswegen das Ergebnis hier lediglich erwähnt und nicht bewiesen wird.

4.4. Der duale Poisson-Laguerre-Prozess

Damit wir über die duale Konfiguration wieder zufällige Mosaike erzeugen können, stellen wir fest, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{dual} : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L}, \\ \eta &\longmapsto \eta^* \end{aligned}$$

dank Satz 4.3.3 wohldefiniert und auch messbar (siehe Bemerkung A.1.14 auf Seite 110) ist.

Und damit haben wir ein weiteres zufälliges Mosaik:

Korollar 4.4.1. *Sei P ein Punktprozess in E mit $P(\mathcal{L}) = 1$, dann ist das Bild von P unter $\varphi_{D\mathcal{L}} \circ \text{dual}$ ein vollständiges zufälliges Mosaik.*

Beweis. Die Aussage folgt aus 4.3.3 und Lemma 4.2.10. □

Gemäß Satz 4.2.11 wissen wir, dass geeignete Poisson-Prozesse auf \mathcal{L} konzentriert sind. Insgesamt haben wir also folgendes Ergebnis:

Theorem 4.4.2. (Der duale Poisson-Laguerre-Prozess) *Ist ρ wie in Satz 4.2.11, dann ist das Bild von P_ρ unter $\varphi_{D\mathcal{L}} \circ \text{dual}$ ein zufälliges vollständiges Mosaik in \mathbb{R}^d . Dieses nennen wir einen dualen Poisson-Laguerre-Prozess.*

Wollten wir nun noch diese Mosaike genauer mit zufälligen *Delaunay-Mosaiken* in Verbindung bringen, so müssten wir weitere Anforderungen an die Ausgangs-Punktkonfigurationen stellen, um sicher zu stellen, dass die resultierenden Polytope Simplizes sind. Das erfordert dann auch weitere Untersuchungen der erzeugenden Punktprozesse. Dies soll aber nicht Thema dieser Arbeit sein. Dennoch widmen wir uns im nächsten Kapitel einem Mosaik, das von Delaunay-Zellen inspiriert ist.

5. Ein nicht vollständiges zufälliges Mosaik

Nachdem wir im vorangegangenen Kapitel zufällige vollständige Mosaik konstruiert haben, stellen wir nun ein zufälliges Mosaik vor, das mit Wahrscheinlichkeit 1 Lücken besitzt. Das heißt, die Cluster, genauer die konvexen Polytope, deren Vertizes die Cluster wie gehabt darstellen, reichen fast sicher nicht aus, um ganz $E = \mathbb{R}^d$ zu überdecken. Dennoch sind es fast sicher unendlich viele¹.

5.1. Radius-beschränkte Delaunay-Cluster

Die Idee für die hier benutzte Cluster-Eigenschaft entstammt [Zes05a]. Die Anforderungen an die Cluster sind allerdings leicht modifiziert, vor allem reduziert, da sich so Fragen bzgl. der Messbarkeit vereinfachen und die Eigenschaften eines Mosaiks mit Lücken dennoch zeigen lassen.

Wir befinden uns in diesem Abschnitt wieder im unmarkierten Raum $E = \mathbb{R}^d$. Der Phasenraum, den wir nun benutzen werden, ist gegeben durch $(E, \mathcal{B}(E), \mathcal{B}(E))$, wobei $\mathcal{B}(E)$ die Borel- σ -Algebra bzgl. der durch die euklidische Metrik induzierte Topologie und $\mathcal{B}(E)$ die Klasse der metrisch beschränkten Mengen ist.

Für ein festes $R \in \mathbb{R}^+$ definieren wir die $(d + 1)$ -Cluster-Eigenschaft D_R wie folgt: Ein Tupel $(x, \eta) \in \mathcal{M}_{d+1}(E) \times \mathcal{M}(E)$ sei in D_R genau dann, wenn

$$(R_1) \quad x \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{M}_{d+1}(E),$$

$$(R_2) \quad \eta \text{ keine Punkte in der Umkugel von } x \text{ hat, außer die Punkte von } x, \text{ d.h. } \eta(K(x) \setminus x) = 0$$

und

$$(R_3) \quad x \text{ eine Umkugel vom Radius kleiner als } R \text{ hat.}$$

Die Bedingung (R_1) stellt sicher, dass wir nur „volldimensionale“ Simplex, also Simplex mit nichtleerem Inneren haben.

Die Bedingung (R_2) wird auch Delaunay-Eigenschaft genannt (siehe [Zes06]). Diese Eigenschaft wird uns später liefern, dass sich die zu den Clustern gehörigen Simplex nur in ganzen

¹Eine interessante, aber in dieser Arbeit nicht behandelte Aufgabe wäre es, Perkolationseigenschaften, also z.B. Größe der Zusammenhangskomponenten zu bestimmen.

Seiten schneiden. Nach [OBS92], S. 94, ist diese Bedingung außerdem charakterisierend für ein Delaunay-Mosaik, also eines zu einem Voronoi-Mosaik dualen, zumindest solange es nur endlich viele Zentren gibt.

Durch Forderung (R_3) werden wir die Lücken in unserem Mosaik erhalten. Außerdem erleichtert sie den Nachweis der lokalen Endlichkeit unseres späteren Mosaiks.

Den Eigenschaften entsprechend wollen wir die Cluster in D_R *radius-beschränkte Delaunay-Cluster* nennen.

Bemerkung 5.1.1. D_R ist eine translations-invariante $d+1$ -Cluster-Eigenschaft von endlicher Reichweite.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Messbarkeit der Eigenschaften.

Zu Messbarkeit der Bedingung (R_1) : Die Menge der Paare (x, η) , die diese Eigenschaft haben, ist gegeben durch $(\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{M}_{d+1}(E)) \times \mathcal{M}(E)$. Da sowohl $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{M}_{d+1}(E)$ als auch $\mathcal{M}(E)$ messbar sind, liegt $(\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{M}_{d+1}(E)) \times \mathcal{M}(E)$ in $\mathcal{F}_{d+1}(E) \otimes \mathcal{F}(E)$.

Zu (R_2) : Es reicht zu zeigen, dass die Abbildung $\mathcal{M}_{d+1}(E) \times \mathcal{M}(E) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, \eta) \mapsto \eta(K(x) \setminus x)$ messbar ist. Dazu sei

$$\mathcal{C} := \{(e, \eta) \in E \times \mathcal{M}(E) \mid e \in \eta\} .$$

Dann ist \mathcal{C} messbar nach [KMM74], S. 107. Außerdem gibt es (ebenfalls [KMM74], S. 109) eine messbare Abbildung $\mathbb{N} \times \mathcal{M}(E) \rightarrow \mathcal{C}$, $(n, \eta) \mapsto (e_n(\eta), \eta)$, die also die Elemente eines Punktmaßes messbar indiziert. Man kann also für $\eta \in \mathcal{M}(E)$ auch $\eta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{e_n(\eta)}$ schreiben. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \eta(K(x) \setminus x) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{e_n(\eta)}(K(x) \setminus x) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{(K(x) \setminus x)}(e_n(\eta)) . \end{aligned}$$

Wegen der Messbarkeit der Indizierung reicht es uns also zu zeigen, dass die Abbildung $E \times (\mathcal{M}_{d+1} \cap \mathcal{S}(E)) \rightarrow \mathbb{R}$, $(e, x) \mapsto 1_{(K(x) \setminus x)}(e)$ messbar ist. Nun ist immer $x \subseteq K(x)$ und somit

$$1_{(K(x) \setminus x)}(e) = 1_{(K(x))}(e) - 1_{\{x\}}(e) .$$

Nun ist $1_{\{x\}}(e) = x(\{e\})$ und somit nach A.1.8 messbar als Funktion von e und x . Es bleibt die Messbarkeit von $\varphi : (e, x) \mapsto 1_{(K(x))}(e)$ zu zeigen. Da diese Funktion lediglich die Werte 0 und 1 annimmt reicht es zu zeigen, dass $\varphi^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{F}_{d+1}(E)$. Es bezeichne $z(x)$

den Mittelpunkt der Umkugel von x und $r(x)$ deren Radius. Es gilt

$$\varphi(e, x) = 1 \iff e \in B_{r(x)}(z(x)) \iff |e - z(x)| \leq r(x).$$

Nun sind $z(x)$ und $r(x)$ Lösungen von durch x bestimmten linearen Gleichungssystemen (Vergleiche Beweis zur Existenz der Umkugel, Lemma 3.2.4), hängen also stetig und somit messbar von x ab. Da der Euklidische Betrag ebenfalls stetig ist, ergibt sich die Messbarkeit von φ und damit unserer Bedingung (R_2) .

Die Messbarkeit der Bedingung (R_3) folgt ebenfalls aus der stetigen Abhängigkeit des Radius $r(x)$ einer Umkugel vom entsprechenden Simplex x .

Die Translationsinvarianz der Cluster-Eigenschaft ergibt sich direkt aus der Unabhängigkeit der Bedingungen vom Ort: So ist das Bild eines Simplex unter einer Translation wieder ein solcher. Und $(\eta + e)(K(x + e) \setminus (x + e)) = \eta(K(x) \setminus x)$. Ebenso bleibt der Radius der Umkugel eines Simplex nach einer Translation erhalten.

Es bleibt also zu zeigen, dass D_R von endlicher Reichweite ist. (Siehe Seite 36.) Sei zunächst

$$\eta \in \mathcal{M}_{D_R} = \{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \text{cd}_{D_R} \eta = +\infty\},$$

wobei

$$\text{cd}_{D_R} \eta = \sum_{\substack{x \in \mathcal{M}_{d+1}(E) \\ x \subseteq \eta}} 1_{D_R}(x, \eta).$$

Sei weiterhin $e \in \eta$. Wir müssen zeigen, dass $\eta - \delta_e \in \mathcal{M}_{D_R}$. Nun ist

$$\text{cd}_{D_R}(\eta - \delta_e) \geq \text{cd}_{D_R} \eta - \sum_{\substack{x \in \mathcal{M}_{d+1}(E) \\ x \subseteq \eta, e \in x}} 1_{D_R}(x, \eta),$$

da $\eta(B) \geq \eta - \delta_e$, für alle $B \in \mathcal{B}(E)$, also insbesondere für $B = K(x) \setminus x$, $x \in \mathcal{M}_{d+1}(E)$. Da $\text{cd}_{D_R} \eta = +\infty$, reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{\substack{x \in \mathcal{M}_{d+1}(E) \\ x \subseteq \eta, e \in x}} 1_{D_R}(x, \eta) < +\infty.$$

Aber da der Radius der Umkugeln von Clustern nach (R_3) durch R beschränkt ist, können höchstens endlich viele Cluster $x \subseteq \eta$ den Punkt e enthalten.

Wir müssen nun noch zeigen, dass für $\eta \in \mathcal{M}_{D_R}$, $e \notin \eta$, auch $\eta + \delta_e \in \mathcal{M}_{D_R}$.

5. Ein nicht vollständiges zufälliges Mosaik

Wir erhalten

$$\text{cd}_{D_R}(\eta + \delta_e) \geq \text{cd}_{D_R} \eta - \sum_{\substack{x \in \mathcal{M}_{d+1}(E), \\ x \subseteq \eta, e \in K(x) \setminus x}} 1_{D_R}(x, \eta).$$

Da wieder $\text{cd}_{D_R} \eta = +\infty$ reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{\substack{x \in \mathcal{M}_{d+1}(E), \\ x \subseteq \eta, e \in K(x) \setminus x}} 1_{D_R}(x, \eta) < +\infty.$$

Auch diese Summe ist endlich, da die Umkugeln der Cluster in η lediglich einen Radius von höchstens R haben: Ist $k = \eta(B_{4R}(e))$, dann gilt

$$\sum_{\substack{x \in \mathcal{M}_{d+1}(E), \\ x \subseteq \eta, e \in K(x) \setminus x}} 1_{D_R}(x, \eta) \leq \sum_{\substack{x \in \mathcal{M}_{d+1}(E), \\ x \subseteq \eta, x \cap B_{4R}(e) \neq \emptyset}} 1_{D_R}(x, \eta) \leq \binom{k}{d+1} < +\infty,$$

da höchstens die Umkugeln der Cluster, die wenigstens einen Punkt in „passender Reichweite“ besitzen, e treffen können und somit schon kombinatorisch nicht mehr als $\binom{k}{d+1}$ mögliche Cluster existieren können. \square

Wir werden nun in den nächsten Schritten zeigen, dass zu gegebenem $\eta \in \mathcal{M}(E)$ die Cluster vom Typ D_R ein Mosaik in E bilden. Dazu definieren wir analog zu Abschnitt 4.2.1 eine Clusterabbildung:

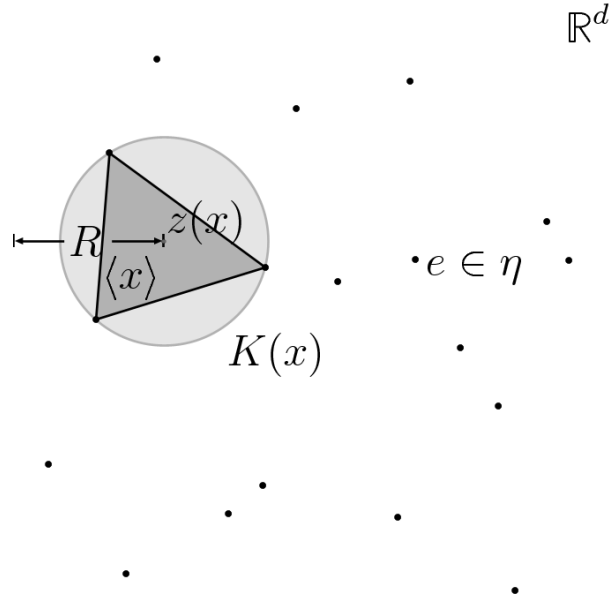
$$\begin{aligned} \varphi_{D_R} : \mathcal{M}(E) &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)) \\ \eta &\longmapsto \sum_{(x, \eta) \in D_R, x \subseteq \eta} \delta_x. \end{aligned}$$

Im Unterschied zu Abschnitt 4.2.1 werden hier direkt Konfigurationen zu den Clustern in η gebildet, d.h. die Vertizes der Polytope in $\varphi_{D_R}(\eta)$ sind alle Punkte der ursprünglichen Konfiguration η . (Die Abbildungen 5.1 und 5.2 veranschaulichen D_R -Clustern in η .) Die Messbarkeit dieser Abbildung folgt aus Bemerkung A.1.11, Seite 107 im Anhang.

Lemma 5.1.2. *Sei $\eta \in \mathcal{M}(E)$. Dann ist $\varphi_{D_R}(\eta)$ ein simplizales lokal endliches Mosaik in E . (Ein Beispiel eines Ausschnitts eines solchen Mosaiks findet sich in Abbildung 5.3.)*

Beweis. Sei $\mu := \varphi_{D_R}(\eta)$. Da die Cluster Simplizes und damit Polytope sind, gilt automatisch die Bedingung (3.2). Ebenso ist deswegen das Mosaik simplizial.

Zur lokalen Endlichkeit: Sei B eine beschränkte Menge. Dann gibt es eine Kugel $B_0 = B_r(a)$, die B enthält. Es sei $B_1 := B_{r+2R}(a)$. Da die Cluster x eine Umkugel vom Radius kleiner

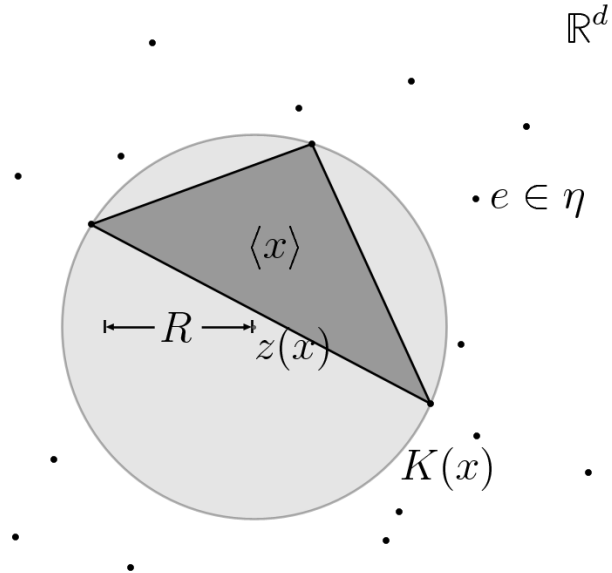

 Abbildung 5.1.: Ein Beispiel für ein D_R -Cluster x in gegebener Konfiguration η

R besitzen, müssen diejenigen, die B treffen mindestens einen Vertex in B_1 besitzen. Aus demselben Grund befinden sich *alle* Vertices von Clustern x , die B treffen in $B_2 := B_{r+4R}(a)$. Nun sind aber die Vertices von $\langle x \rangle$ genau die Elemente von η . Aber dann gilt $\text{card}\{x \in \mu \mid \langle x \rangle \cap B \neq \emptyset\} \leq \binom{\eta(B_2)}{d+1} < +\infty$, da die Cluster in η , von denen alle Vertices in B_2 liegen, $(d+1)$ -elementige Teilmengen von $\eta \cap B_2$ sind und da η lokal endlich ist.

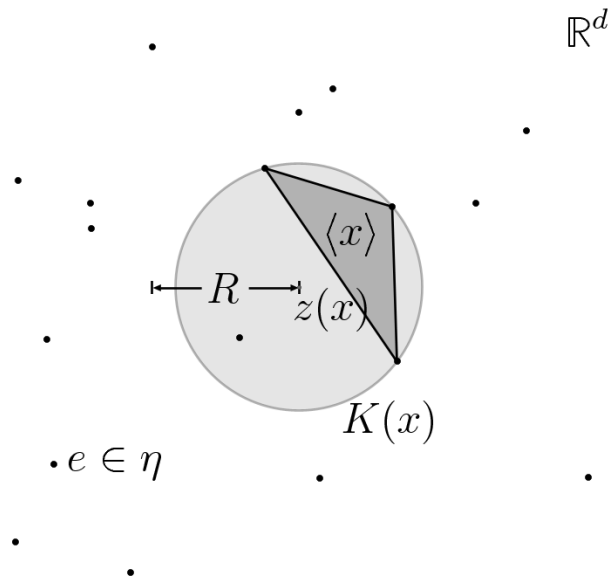
Wir müssen also nur noch zeigen, dass μ seitentreu ist. Es seien $x, y \in \mu$, $x \neq y$ und $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \emptyset$. Da die konvexen Hüllen von x und y ganz in den entsprechenden Umkugeln liegen, gilt auch $K(x) \cap K(y) \neq \emptyset$.

Fall 1 (siehe Abbildung 5.4): $S(x)$ und $S(y)$ schneiden sich in genau einem Punkt v . Dann schneiden auch beide Sphären die Hyperebene H , die durch v geht und senkrecht zu der Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte der Kugeln $K(x)$ und $K(y)$ steht, nur im Punkt v . Wegen Bedingung (R_2) liegen die Sphären auf verschiedenen Seiten der Hyperebene. Da sich nach Voraussetzung $\langle x \rangle$ und $\langle y \rangle$ schneiden und innerhalb der Sphären liegen, ist der einzige Schnittpunkt v und H ist eine Stützhyperebene von sowohl $\langle x \rangle$ als auch $\langle y \rangle$, mit anderen Worten v ist ein Vertex, insbesondere eine Seite, von beiden Polytopen.

Fall 2 (siehe Abbildung 5.5): $S(x)$ und $S(y)$ schneiden sich in einer $(d-2)$ -Sphäre S . Diese liegt in einer eindeutig bestimmten Hyperebene H . Es seien H^+ und H^- die durch H erzeugten Halbräume. Weiter seien $K^+(x) := H^+ \cap K(x)$, $K^-(x) := H^- \cap K(x)$ und $K^+(y) := H^+ \cap K(y)$, $K^-(y) := H^- \cap K(y)$, also die „Kugelkappen“. Da S im Rand von $K(x)$ und $K(y)$ liegt, liegt eine Kappe von $K(x)$ ganz in einer von $K(y)$ und umgekehrt.



(a) x ist kein D_R -Cluster in η , da die Umkugel einen zu großen Radius besitzt



(b) x ist kein D_R -Cluster in η , da ein zusätzlicher Punkt aus η in der Umkugel von x liegt

Abbildung 5.2.: Beispiele für *nicht*-Cluster in einer Konfiguration η

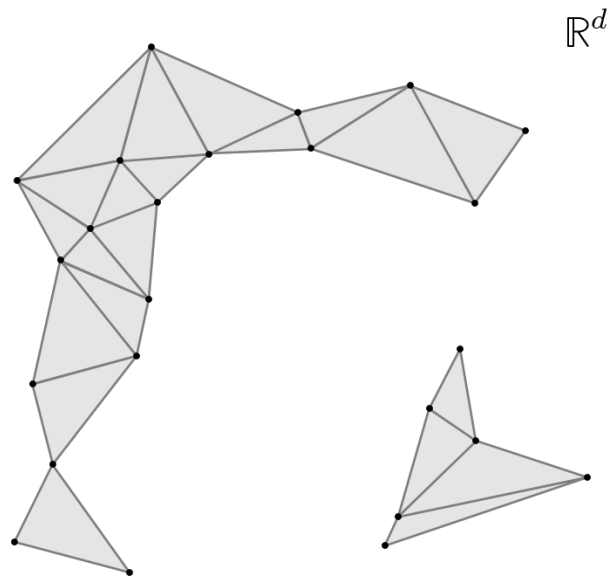


Abbildung 5.3.: Ein Beispiel eines Mosaiks, das aus D_R -Clustern einer Konfiguration η besteht

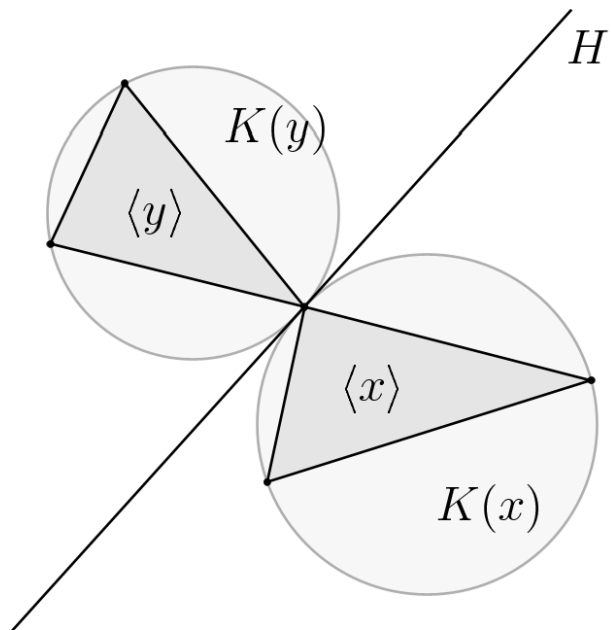


Abbildung 5.4.: Fall 1; Die Umkugeln der Simplexes treffen sich in genau einem Punkt

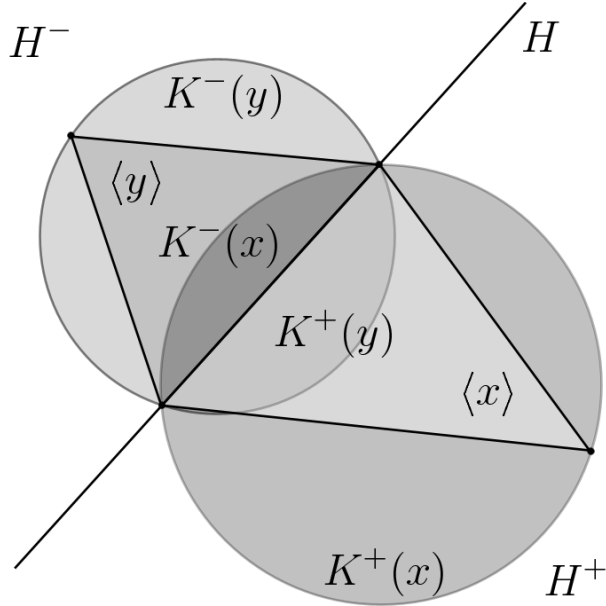


Abbildung 5.5.: Fall 2; Die Umkugeln der Simplexes treffen sich in einer $(d - 2)$ -Sphäre

O. B. d. A. $K^+(y) \subseteq K^+(x)$ und $K^-(x) \subseteq K^-(y)$. Wegen Bedingung (R_2) muss dann ganz x und damit auch $\langle x \rangle$ in H^+ , genauso wie y und damit auch $\langle y \rangle$ in H^- liegen. Da der Schnitt von $\langle x \rangle$ und $\langle y \rangle$ als nicht leer vorausgesetzt ist und in H liegt, ist H eine Stützhyperebene von beiden Polytopen und der Schnitt von Beiden jeweils eine Seite.

Fall 3: Die Umkugeln sind gleich. Dieser Fall ist direkt ausgeschlossen wegen Bedingung (R_2) , da sonst entweder $x = y$ oder aber die Umkugel von x einen weiteren Punkt auf dem Rand hätte.

Fall 4: Es gilt $S(x) \cap S(y) = \emptyset$. Dann wäre o. B. d. A. $S(x) \subset K^\circ(y)$. Das ist aber wegen Bedingung (R_2) ausgeschlossen, da alle Elemente von x bzw. y in $S(x)$ bzw. $S(y)$ liegen und dann

$$\eta(K(y) \setminus y) \geq \eta(K^\circ(y)) \geq \eta(S(x)) \geq \text{card } x = d + 1 > 0.$$

□

5.2. Ein Poisson-Delaunay-Mosaik mit Lücken

In diesem Abschnitt wird ein zufälliges Mosaik mithilfe des Poissonschen Punktprozesses konstruiert, das fast sicher nicht vollständig ist. Dabei werden wir ausnutzen, dass in einer Punktconfiguration, die durch diesen Prozess realisiert wird, fast sicher große Lücken entstehen, so groß, dass sie nicht von den Clustern überdeckt werden können.

Das Lemma 5.1.2 leitet uns direkt zu folgender Aussage:

Lemma 5.2.1. *Es sei P ein einfacher Punktprozess in E . Dann ist das Bild von P unter φ_{D_R} ein zufälliges Mosaik.*

Beweis. Sei $P_{\varphi_{D_R}}$ das Bild von P unter φ_{D_R} . Sei weiter M eine messbare Menge, die $\mathbb{M}(E)$ enthält. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 P_{\varphi_{D_R}}(M) &= \int_{\mathcal{M}(\mathcal{M}_f(E))} 1_M(\mu) P_{\varphi_{D_R}}(d\mu) \\
 &\stackrel{\text{Transformationssatz}}{=} \int_{\mathcal{M}(E)} \underbrace{1_M(\varphi_{D_R}(\eta))}_{=1 \text{ nach Lemma 5.1.2}} P(d\eta) \\
 &= \int_{\mathcal{M}(E)} P(d\eta) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

Insbesondere erfüllt also der Poisson-Punktprozess mit einem diffusen Intensitätsmaß die Voraussetzungen des Lemmas.

Ein stationärer Poisson-Punktprozess erfüllt darüber hinaus die Voraussetzungen zu Satz 2.3.4 für D_R :

Bemerkung 5.2.2. Sei $\rho = z\lambda$, wobei $z \in \mathbb{R}$ und λ das Lebesgue-Maß in E ist. Sei P_ρ der zugehörige Poissonpunktprozess in E . Dann gilt

$$P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \text{cd}_{D_R} \eta \geq 1\}) > 0. \quad (5.1)$$

Beweis. Betrachten wir $d + 1$ affin unabhängige Punkte v_1, \dots, v_{d+1} im Inneren der abgeschlossenen Kugel $B_R(0)$ mit Radius R um $0 \in E$, so finden wir wegen der Stetigkeit der euklidischen Metrik und des Skalarprodukts $\varepsilon > 0$, so dass

- (i) die abgeschlossenen Kugeln $B_\varepsilon(v_i) \subseteq B_R(0)$ für alle $i = 1, \dots, d + 1$ und
- (ii) für jede Wahl von Punkten $\tilde{v}_i \in B_\varepsilon(v_i)$, $i = 1, \dots, d + 1$, diese $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{d+1}$ wieder affin unabhängig sind und die jeweilige zu dem aus diesen Punkten gebildeten Simplex gehörige Umkugel ganz in $B_R(0)$ liegt.

(Siehe Abbildung 5.6.) Angenommen η hätte jeweils genau einen Punkt \tilde{v}_i in allen $B_\varepsilon(v_i)$ und keinen weiteren Punkt in $B_R(0)$, dann wäre $x = \sum_{i=1}^{d+1} \delta_{\tilde{v}_i}$ ein Cluster:

Nach Konstruktion sind $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{d+1}$ affin unabhängig und außerdem hat der von ihnen erzeugte Simplex eine Umkugel vom Radius kleiner als R , da diese nach Konstruktion ganz in einer Kugel vom Radius R liegt.

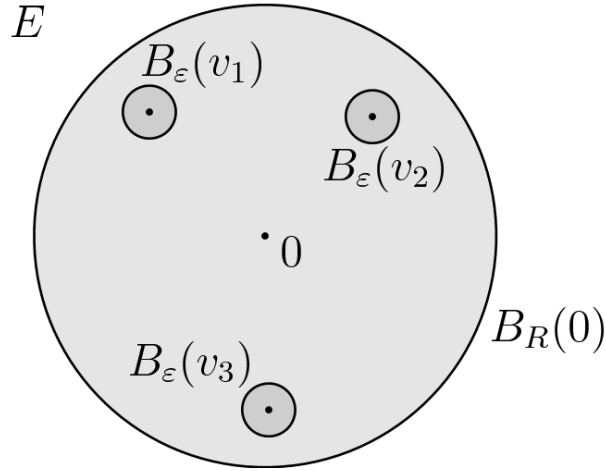


Abbildung 5.6.: Die affine Unabhängigkeit von Punkten ist stabil unter kleinen Änderungen

Nun müssen wir noch zeigen, dass ein solches η mit positiver Wahrscheinlichkeit auftritt: Zunächst halten wir fest, dass die Menge aller $\eta \in \mathcal{M}(E)$, die obige Voraussetzungen erfüllen, gegeben ist durch

$$\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_0}(\eta) = 0\} \cap \bigcap_{i=1}^{d+1} \{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_i}(\eta) = 1\},$$

wobei $B_0 := B_R(0) \setminus \bigcup_{i=1}^{d+1} B_\varepsilon(v_i)$ und für $i = 1, \dots, d+1$ die Mengen $B_i := B_\varepsilon(v_i)$ sind. Wir stellen außerdem fest, dass diese Mengen paarweise disjunkt sind. Damit gilt

$$\begin{aligned} & P_\rho \left(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_0}(\eta) = 0\} \cap \bigcap_{i=1}^{d+1} \{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_i}(\eta) = 1\} \right) \\ \stackrel{\text{unabhängige Zuwächse}}{=} & P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_0}(\eta) = 0\}) \prod_{i=1}^{d+1} P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_i}(\eta) = 1\}) \\ = & e^{-\rho(B_0)} \prod_{i=1}^{d+1} \rho B_i e^{-\rho(B_i)} \\ = & e^{-z\lambda(B_0)} \prod_{i=1}^{d+1} z\lambda(B_i) e^{-z\lambda(B_i)} \\ > & 0, \end{aligned}$$

da die Mengen B_0, \dots, B_{d+1} positives Lebesguemaß besitzen. Aber wie wir oben gesehen haben, ist die Menge $\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_0}(\eta) = 0\} \cap \bigcap_{i=1}^{d+1} \{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_i}(\eta) = 1\}$ in der Menge

$\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \text{cd}_{D_R} \eta \geq 1\}$ enthalten, und damit gilt

$$\begin{aligned} & P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \text{cd}_{D_R} \eta \geq 1\}) \\ & \geq P_\rho\left(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_0}(\eta) = 0\} \cap \bigcap_{i=1}^{d+1} \{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_i}(\eta) = 1\}\right) \\ & > 0, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. \square

Nach Korollar 2.3.2 und Satz 2.3.4 gilt also $P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M} \mid \text{cd}_{D_R} \eta = +\infty\}) = 1$. der Poisson-Punktprozess realisiert also fast sicher unendlich viele Cluster. Trotzdem reichen diese nicht, um ganz E zu überdecken:

Theorem 5.2.3. *Es sei $\rho = z\lambda$, wobei $z \in \mathbb{R}^+$ ist und λ das Lebesgue-Maß in E . Sei P_ρ der Poisson-Punktprozess in E mit Intensitätsmaß ρ und $Q := P_\rho \circ \varphi_{D_R}^{-1}$ das Bild von P_ρ unter φ_{D_R} . Dann ist Q ein zufälliges nicht vollständiges Mosaik, d.h. es gibt eine messbare Menge $N \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{M}_f(E))$ mit $\mathbb{M}_v(E) \subseteq N$ und $Q(N) = 0$.*

*Beweis.*² Dass Q ein zufälliges Mosaik ist, folgt direkt aus Lemma 5.2.1. Weil $\mathbb{M}_v(E) \subseteq \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{M}_f(E)) \mid \bigcup_{x \in \mu} \langle x \rangle = E \right\} =: N$ ist, reicht zu zeigen, dass

$$Q\left(\left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{M}_f(E)) \mid \bigcup_{x \in \mu} \langle x \rangle = E \right\}\right) = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & Q\left(\left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{M}_f(E)) \mid \bigcup_{x \in \mu} \langle x \rangle = E \right\}\right) \\ \stackrel{\text{Transformationssatz}}{=} & P_\rho\left(\left\{ \eta \in \mathcal{M}(E) \mid \bigcup_{x \in \varphi_{D_R}(\eta)} \langle x \rangle = E \right\}\right). \end{aligned}$$

Sei nun $0 < \varepsilon < R$ und $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung von \mathbb{Z}^d . Weiter sei

$$Z_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_\varepsilon(8Rz_i),$$

²Die Messbarkeit der im Beweis vorkommenden Mengen folgt aus der Messbarkeit der Abbildungen, die sie beschreiben. Dass φ_{D_R} messbar ist, haben wir bereits gezeigt. Aber auch die Abbildung, die mehreren abgeschlossenen Mengen ihre Vereinigung zuordnet, ist stetig im Sinne der Matheron-Topologie nach [Mat75], S. 7 und damit messbar. Genauso ist die Abbildung stetig, die einer kompakten Menge ihre konvexe Hülle zuordnet, siehe [Mat75], S. 21.

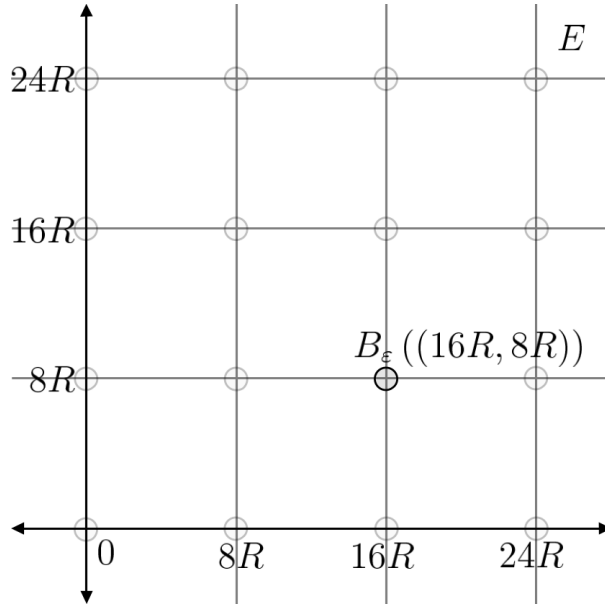


Abbildung 5.7.: Auch all diese ε -Kugeln müssen von Simplexen überdeckt werden

also ε -Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem Gitter mit Gitterabstand $8R$ liegen. Dann ist $Z_\varepsilon \subseteq E$ und damit

$$\left\{ \eta \in \mathcal{M}^*(E) \mid \bigcup_{x \in \varphi_{D_R}(\eta)} \langle x \rangle = E \right\} \subseteq \left\{ \eta \in \mathcal{M}^*(E) \mid Z_\varepsilon \subseteq \bigcup_{x \in \varphi_{D_R}(\eta)} \langle x \rangle \right\}.$$

(Siehe Abbildung 5.7.) Außerdem ist

$$\left\{ \eta \in \mathcal{M}^*(E) \mid Z_\varepsilon \subseteq \bigcup_{x \in \varphi_{D_R}(\eta)} \langle x \rangle \right\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left\{ \eta \in \mathcal{M}^*(E) \mid B_\varepsilon(z_i) \subseteq \bigcup_{x \in \varphi_{D_R}(\eta)} \langle x \rangle \right\},$$

und damit

$$\begin{aligned} & P_\rho \left(\left\{ \eta \in \mathcal{M}^*(E) \mid \bigcup_{x \in \varphi_{D_R}(\eta)} \langle x \rangle = E \right\} \right) \\ & \leq P_\rho \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \left\{ \eta \in \mathcal{M}^*(E) \mid B_\varepsilon(z_i) \subseteq \bigcup_{x \in \varphi_{D_R}(\eta)} \langle x \rangle \right\} \right) \\ & = \int_{\mathcal{M}^*(E)} \prod_{i=1}^{\infty} 1_{\left\{ \eta \in \mathcal{M}^*(E) \mid B_\varepsilon(z_i) \subseteq \bigcup_{x \in \varphi_{D_R}(\eta)} \langle x \rangle \right\}}(\eta) P_\rho(d\eta). \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass für gegebenes z_i gilt

$$A_i := \left\{ \eta \in \mathcal{M}^*(E) \mid B_\varepsilon(z_i) \subseteq \bigcup_{x \in \varphi_{D_R}(\eta)} \langle x \rangle \right\} \subseteq \{ \eta \in \mathcal{M}^*(E) \mid \zeta_{B_{3R+\varepsilon}(z_i)}(\eta) \geq 1 \} =: A_i^*.$$

Sei also $\eta \notin A_i^*$, d.h. $\zeta_{B_{3R+\varepsilon}(z_i)}(\eta) = 0$. (Vergleiche Abbildung 5.8.) Sei weiterhin $x \in \varphi_{D_R}(\eta)$.

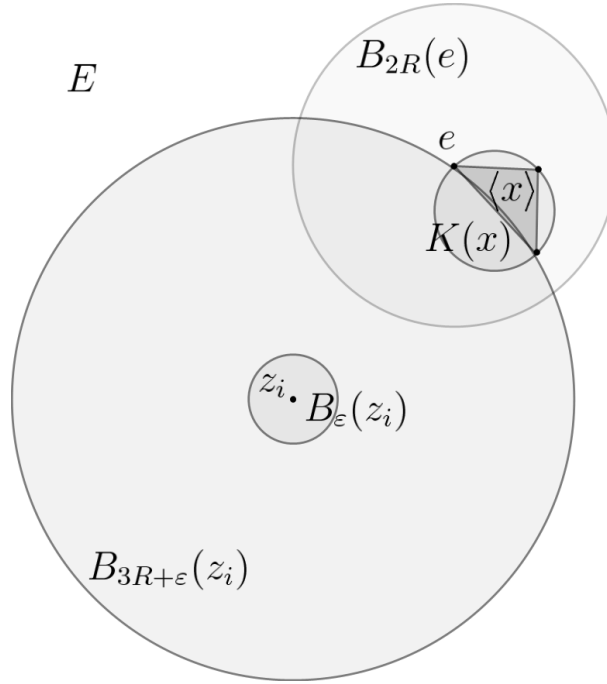


Abbildung 5.8.: Es muss Lücken geben

Dann ist $\langle x \rangle \subseteq K(x)$. Außerdem gilt für $e \in x$, dass $K(x) \subseteq B_{2R}(e)$, wegen der Bedingung (R_2) . Somit gilt einerseits für $v \in \langle x \rangle$, dass $|v - e| \leq 2R$, aber andererseits gilt $|e - z_i| \geq 3R + \varepsilon$. Damit gilt nach umgekehrter Dreiecksungleichung

$$|z_i - v| \geq ||z_i - e| - |v - e|| \geq 3R + \varepsilon - 2R \geq R + \varepsilon > \varepsilon.$$

Daraus folgt aber, dass $B_\varepsilon(z_i) \cap \langle x \rangle = \emptyset$, für alle $x \in \varphi_{D_R}(\eta)$, und somit $\eta \notin A_i$.

Also gilt nun insgesamt auch Folgendes:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}^*(E)} \prod_{i=1}^{\infty} 1_{\left\{ \eta \in \mathcal{M}^*(E) \mid B_\varepsilon(z_i) \subseteq \bigcup_{x \in \varphi_{D_R}(\eta)} \langle x \rangle \right\}}(\eta) P_\rho(d\eta) \\ & \leq \int_{\mathcal{M}^*(E)} \prod_{i=1}^{\infty} 1_{\left\{ \eta \in \mathcal{M}^*(E) \mid \zeta_{B_{3R+\varepsilon}(z_i)}(\eta) \geq 1 \right\}}(\eta) P_\rho(d\eta). \end{aligned}$$

Wir stellen nun zunächst fest, dass wegen des großen Gitterabstands die Mengen $B_{3R+\varepsilon}(z_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind und somit die Zufallsvariablen $\zeta_{B_{3R+\varepsilon}(z_i)}$ unabhängig bezüglich P_ρ . (Siehe Abbildung 5.9.) Damit können wir nun tatsächlich eine obere Grenze für

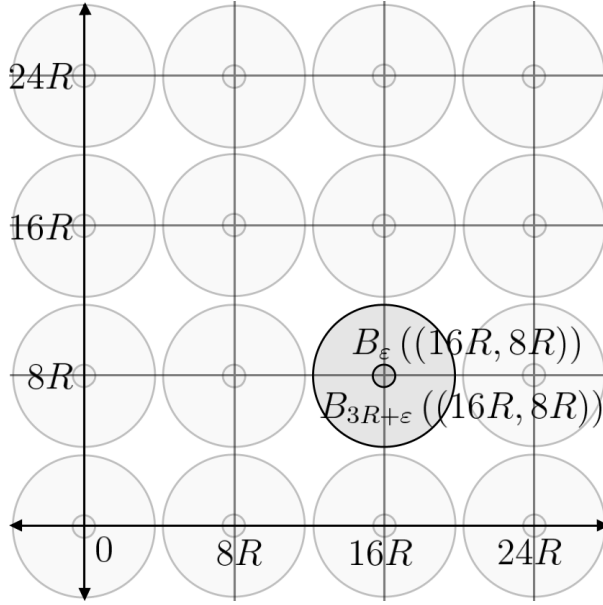


Abbildung 5.9.: Die Mengen sind so gewählt, dass sie paarweise disjunkt sind

die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{M}(E)} \prod_{i=1}^{\infty} 1_{\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_{3R+\varepsilon}(z_i)}(\eta) \geq 1\}}(\eta) P_\rho(d\eta) \\
 \stackrel{\text{Unabhängigkeit der Zufallsvariablen}}{=} & \prod_{i=1}^{\infty} P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_{3R+\varepsilon}(z_i)}(\eta) \geq 1\}) \\
 \stackrel{P_\rho \text{ stationär}}{=} & \prod_{i=1}^{\infty} P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_{3R+\varepsilon}(0)}(\eta) \geq 1\}) \\
 = & \prod_{i=1}^{\infty} (1 - P_\rho(\{\eta \in \mathcal{M}(E) \mid \zeta_{B_{3R+\varepsilon}(0)}(\eta) = 0\})) \\
 = & \prod_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - e^{-\rho(B_{3R+\varepsilon}(0))}\right)}_{<1, \text{ da } \lambda(B_{3R+\varepsilon}(0))>0 \text{ und damit } \rho(B_{3R+\varepsilon}(0))>0} \\
 = & 0.
 \end{aligned}$$

Somit haben wir also

$$Q(N) = P_\rho \left(\left\{ \eta \in \mathcal{M}(E) \mid \bigcup_{x \in \varphi_{D_R}(\eta)} \langle x \rangle = E \right\} \right) = 0.$$

□

Damit haben wir sowohl einfache Punktprozesse in $\mathcal{M}_f(E)$ konstruiert, die fast sicher vollständige (vergleiche Abschnitte 4.2.2 und 4.4) Mosaik liefern, als auch einen weiteren, der fast sicher nicht vollständige Mosaik produziert. Letzterer hat die Lücken eben an den Stellen, wo die Cluster „zu groß“ wären. Diese treten auf, da der Poisson-Punktprozess beliebig viele und beliebig große Lücken zwischen den einzelnen Punkten realisiert, was im Falle eines Poisson-Laguerre-Cluster-Prozesses lediglich zum häufigen Auftreten großer Polytope führt. Ebenso kommen beliebig dicht liegende Punkte vor, was eine analoge Bildung einer Cluster-Eigenschaft ermöglicht, bei der Lücken dadurch entstehen, dass man „zu kleine“ Cluster ausschließt.

Anhang

A. Messbarkeitsfragen

A.1. Messbarkeit bestimmter Abbildungen

In den vorangegangenen Kapiteln sind oft Fragen zur Messbarkeit bestimmter Abbildungen aufgeschoben worden. Die Intention dabei war, die Ideen und Strukturen von Beweisen nicht unnötig durch technische Aspekte in den Hintergrund zu drängen.

Das ändert allerdings nichts an der Notwendigkeit der Behandlung solcher Aspekte. Deswegen werden die fehlenden Beweisschritte hier nachgeholt.

In der Folge wird oft über *monotone-Klassen-Argumente* gesprochen. Dabei geht es um die Verwendung des folgenden Satzes:

Satz A.1.1. *Es sei \mathcal{A} ein π -System, d.h. ein System aus Teilmengen einer Grundmenge X , das abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist. Weiter sei \mathcal{D} ein λ -System, d.h. ein Teilmengen-System von X , so dass*

$$(i) \quad X \in \mathcal{D},$$

$$(ii) \quad (D_1, D_2 \in \mathcal{D}, D_1 \subseteq D_2) \quad \Rightarrow \quad (D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}),$$

$$(iii) \quad (D_1, D_2, \dots \in \mathcal{D}, D_n \uparrow D \text{ für } n \rightarrow \infty) \quad \Rightarrow \quad D \in \mathcal{D},$$

dann folgt aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$, dass

$$\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}.$$

Beweis. Siehe [Kal02], Seite 2, Theorem 1.1 . □

Auch diesen klassischen Satz der Maßtheorie werden wir brauchen:

Satz A.1.2. *Es sei I eine beliebige Indexmenge und $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen $f_i : X \rightarrow X_i$, wobei X eine beliebige Menge und (X_i, \mathcal{A}_i) für alle $i \in I$ messbare Räume sind. Ferner sei (Y, \mathcal{B}) ein weiterer messbarer Raum und $g : Y \rightarrow X$ eine weitere Abbildung. Diese Abbildung g ist genau dann $\mathcal{B} - \sigma(f_i, i \in I)$ -messbar, wenn jede der Abbildungen $h_i := f_i \circ g$, $i \in I$, messbar ist.*

Beweis. Siehe [Bau92], S. 42, Satz 7.4. □

Schon in Kapitel 1 traten dabei folgende Messbarkeits-Probleme auf:

Lemma A.1.3. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathcal{M}(X \times X), \\ (\mu, \nu) &\longmapsto \mu \otimes \nu \end{aligned}$$

ist messbar.

Beweis. Da die Funktionen ζ_A , $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, die σ -Algebra $\mathcal{F}(X \times X)$ erzeugen, reicht es nach Satz A.1.2 zu zeigen, dass die Abbildungen $\zeta_A \circ \otimes : (\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu(A)$, messbar sind. Dazu benutzen wir nun Satz A.1.1: Es sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Mengen aus $\mathcal{B}_0(X)$ mit $B_n \uparrow X$, für $n \rightarrow \infty$, d.h. eine Lokalisierung. Es sei

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \mid (\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu(A) \text{ ist messbar}\}.$$

Ferner sei

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \mid (\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu(A \cap (B_n \times B_n)) \text{ ist messbar}\}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{D} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n.$$

Wir müssen nun zeigen,

- (i) dass \mathcal{D} ein λ -System ist und
- (ii) dass \mathcal{D} das π -System

$$\mathcal{C} := \{B \times C \mid B, C \in \mathcal{A}\}$$

enthält.

Denn dann ist $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Zunächst zu (ii): Seien $A_1 \times B_1$ und $A_2 \times B_2 \in \mathcal{C}$. Dann ist

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

und $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{A}$, da \mathcal{A} als σ -Algebra stabil unter endlichen Schnitten ist. Also ist auch \mathcal{C} ein π -System.

Nun müssen wir zeigen, dass \mathcal{C} in \mathcal{D} enthalten ist. Für $B, C \in \mathcal{A}$ sollte also

$$\begin{aligned} f_{A,B} : \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ (\mu, \nu) &\longmapsto \mu \otimes \nu(B \times C) = \mu(B) \cdot \nu(C) \end{aligned}$$

messbar sein. Nun ist $f_{B,C} = g_B \cdot h_C$, mit $g_B : (\mu, \nu) \mapsto \mu(B)$ und $h_C : (\mu, \nu) \mapsto \nu(C)$. Aber diese beiden Funktionen sind messbar, da

$$g_B^{-1}(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{ \mu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_{B \cap B_n}(\mu) \in I \} \times \mathcal{M}(X) \in \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(X),$$

bzw.

$$h_C^{-1}(I) = \mathcal{M}(X) \times \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{ \nu \in \mathcal{M}(X) \mid \zeta_{B \cap B_n}(\nu) \in I \} \in \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(X),$$

für $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0^+)$. Aber damit ist $f_{A,B}$ als Produkt messbarer Abbildungen wieder messbar.

Zu (i): Wir zeigen, dass jedes \mathcal{D}_n ein λ -System ist¹. Da $X \times X$ schon in \mathcal{C} enthalten ist, ist es nach (ii) auch ein Element von \mathcal{D} , also auch von jedem \mathcal{D}_n .

Sind $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_n$, $D_1 \subseteq D_2$, dann ist $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu(D_2 \setminus D_1 \cap (B_n \times B_n)) = \mu \otimes \nu(D_2 \cap (B_n \times B_n)) - \mu \otimes \nu(D_1 \cap (B_n \times B_n))$ messbar als Differenz messbarer Abbildungen².

Ebenso ist für $D_1, D_2, \dots \in \mathcal{D}$, $D_m \uparrow D$ für $m \rightarrow \infty$, die Abbildung $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu(D \cap (B_n \times B_n)) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \mu \otimes \nu(D_m \cap (B_n \times B_n))$ messbar als Supremum messbarer Abbildungen.

Also ist \mathcal{D}_n ein λ -System und unser Beweis vollständig. □

In der Arbeit haben wir die öfteren Funktionen anhand von Integralen definiert. Oft war es dabei von Bedeutung, dass folgende Bemerkung gilt:

Bemerkung A.1.4. Es sei $h : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion. Dann ist auch die Funktion

$$\begin{aligned} I_h : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \\ \mu &\longmapsto \int_X h(x) \mu(dx), \end{aligned}$$

eine $\mathcal{F}(X)$ -messbare Funktion.

Beweis. Die Aussage folgt aus maßtheoretischen Standardüberlegungen, da für $h = 1_B$, $B \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(X)$, die Funktion I_h genau der Funktion ζ_B entspricht. Aber solche Funktionen erzeugen $\mathcal{F}(X)$. □

Ein ähnliches Ergebnis ist das folgende:

¹Es ist einfach einzusehen, dass der Schnitt von λ -Systemen wieder ein λ -System ist.

²Bei der Bildung obiger Differenz geht ein, dass es sich bei $D_2 \setminus D_1 \cap (B_n \times B_n)$, $D_1 \cap (B_n \times B_n)$, $D_2 \cap (B_n \times B_n)$ um beschränkte Mengen handelt, da dann die Maße dieser Mengen endlich sind.

Bemerkung A.1.5. Es sei $h \in \mathcal{F}_+(X \times \mathcal{M}(X))$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} I_h : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \mu &\longmapsto \int_X h(x, \mu) \mu(dx) \end{aligned}$$

ebenfalls messbar.

Beweis. Sei zunächst $h(x, \mu) := 1_B(x)1_N(\mu)$ mit $B \in \mathcal{B}_0(X)$ und $N \in \mathcal{F}(X)$, dann ist

$$\int_X h(x, \mu) \mu(dx) = 1_N(\mu) \int_X 1_B(x) \mu(dx) = 1_N(\mu) \zeta_B(\mu).$$

Dies ist messbar als Produkt zweier messbarer Abbildungen. Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Lokalisierung. Einfache Überlegungen ähnlich zu dem Beweis von A.1.3 zeigen, dass das System

$$\mathcal{C} := \{A \times N \mid A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{F}(X)\}$$

ein π -System ist, das in dem λ -System

$$\mathcal{D} := \left\{ D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}(X) \mid \mu \mapsto \int_{X_n} 1_D(x, \mu) \mu(dx) \text{ ist messbar für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$$

enthalten ist. Der Satz über monotone Klassen liefert dann, dass $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}(X)$. Somit ist aber auch für alle $D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}(X)$ die Abbildung

$$\mu \longmapsto \int_X 1_D(x, \mu) \mu(dx) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{X_n} 1_D(x, \mu)$$

messbar. Maßtheoretische Standardüberlegungen ergeben nun die Aussage der Bemerkung. \square

Ab hier beschäftigen wir uns wieder nur mit dem Fall $X = E = \mathbb{R}^d$ und schreiben oft wieder \mathcal{M} anstatt $\mathcal{M}(E)$, etc.. Auf diese Weise haben wir mehr Struktur zur Verfügung und können uns vor allem auf diverse Standardwerke wie [SW00] und [KMM74] berufen, da die dort verwendeten σ -Algebren den Unseren entsprechen.

Es bestehen viele der Abbildungen in den ersten Kapiteln aus Summen, deren Indizierung von der Punktconfiguration abhängt, die wiederum vom Argument abhängt. Das folgende Lemma beweist die Messbarkeit einer Vielzahl solcher Abbildungen:

Lemma A.1.6. *Es sei $h : \mathcal{M}_k \times \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ eine $\mathcal{F}_k \otimes \mathcal{F}$ -messbare Abbildung.*

Dann ist auch

$$\begin{aligned} \varphi_h : \mathcal{M} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \\ \eta &\longmapsto \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_k} h(x, \eta) \end{aligned}$$

eine \mathcal{F} -messbare Abbildung.

Beweis. Zu Anfang sollte erwähnt werden, dass wegen der lokalen Endlichkeit von η eine Summe der Form $\sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_k}$ mit positiven Summanden sich zunächst als endliche Summe vorgestellt werden kann, indem man lediglich über $x \in (\eta \cap B_n) \cap \mathcal{M}_k$ mit einem beschränkten B_n summiert. Per Übergang $B_n \uparrow E$ für $n \rightarrow \infty$ wird dann die Messbarkeit der eventuell (abzählbar) unendlichen Summe gewährleistet, da die Folge der endlichen Summen dann aufsteigt gegen die ursprüngliche und Suprema von messbaren Abbildungen messbar sind. Bei beliebigen Summanden können dann wie üblich die positiven und negativen separat behandelt werden.

Der restliche Beweis wird durch vollständige Induktion über k geführt:

Induktionsanfang, $k = 1$:

(α) Sei zunächst $h : \mathcal{M}_1 \mapsto \mathbb{R}$ messbar. Nun definiere $g : E \mapsto \mathbb{R}$ vermöge $g(e) = h(\delta_e)$. Dann ist g messbar, denn sowohl h als auch die Abbildung $\delta_e \mapsto e$ sind messbar (vergl. [KMM74] Seite 2). Und damit ist

$$\begin{aligned} \varphi_h(\eta) &= \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} h(x) = \sum_{a \in \eta} h(\delta_a) = \sum_{a \in \eta} g(a) \\ &= \int_E g(a) \eta(da). \end{aligned}$$

Nach A.1.4 ist aber $\eta \mapsto \int_E g(a) \eta(da)$ messbar, also auch φ_h in diesem Fall.

(β) Sei nun $h = 1_{A \times B}$ mit $A \in \mathcal{F}_1$ und $B \in \mathcal{F}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \varphi_h(\eta) &= \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} h(x, \eta) = \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_{A \times B}(x, \eta) = \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_A(x) 1_B(\eta) \\ &= 1_B(\eta) \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_A(x). \end{aligned}$$

Aber $\eta \mapsto 1_B(\eta)$ ist messbar und ebenso $\eta \mapsto \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_A(x)$ nach (α). Also auch das Produkt dieser beiden Abbildungen, φ_h .

(γ) Es sei $h = 1_A$ mit $A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}$. Weiter sei

$$\mathcal{D} := \left\{ A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F} \mid \eta \mapsto \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_A(x, \eta) \text{ ist messbar} \right\}$$

und

$$\mathcal{C} := \{ A \times B \mid A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F} \} .$$

Es ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ nach (β) und außerdem ist $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}$. Damit sich der Satz A.1.1 anwenden lässt, müssen \mathcal{D} ein λ - und \mathcal{C} ein π -System sein:

Seien $A_1 \times B_1$ und $A_2 \times B_2 \in \mathcal{C}$. Dann ist

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

und $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_1, B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$. Also ist \mathcal{C} ein π -System.

Da $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}$ sogar in \mathcal{C} ist, ist es trivialerweise auch in \mathcal{D} .

Außerdem ist für $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ mit $D_1 \subseteq D_2$

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_{D_2 \setminus D_1}(x, \eta) &= \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} (1_{D_2}(x, \eta) - 1_{D_1}(x, \eta)) \\ &= \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_{D_2}(x, \eta) - \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_{D_1}(x, \eta) . \end{aligned}$$

Aber beide Summen $\sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_{D_2}(x, \eta)$ und $\sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_{D_1}(x, \eta)$ sind nach (β) messbare Abbildungen in η und damit ist es auch deren Differenz. Womit $D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$ gezeigt wäre.

Seien $D_1, D_2, \dots \in \mathcal{D}$ und $D_n \uparrow D$ für $n \rightarrow \infty$. Man erhält

$$\sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_D(x, \eta) = \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} \sup_{n \in \mathbb{N}} 1_{D_n}(x, \eta) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_{D_n}(x, \eta) ,$$

was als Funktion in η messbar ist. Somit ist auch $D \in \mathcal{D}$ und \mathcal{D} ist ein λ -System.

Man kann also Satz A.1.1 anwenden und erhält, dass für jedes $A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}$ die Abbildung $\eta \mapsto \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_1} 1_A(x, \eta)$, also das entsprechende φ_h , messbar ist.

(δ) Da φ_h linear in h ist, können wir (γ) auch auf Elementarfunktionen der Form $h = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}$, $c_j \geq 0$, $A_j \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}$, $1 \leq j \leq n$, ausweiten.

Für positive messbare $h : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ gibt es Elementarfunktionen $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_n \uparrow h$ für $n \rightarrow \infty$.

Und damit ist

$$\varphi_h(\eta) = \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}'_1} h(x, \eta) = \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}'_1} \sup_{n \in \mathbb{N}} h_n(x, \eta) \stackrel{h_n \uparrow}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}'_1} h_n(x, \eta).$$

Dieses φ_h ist als Supremum messbarer Abbildungen also auch messbar.

Ist nun $h : \mathcal{M}'_1 \times \mathcal{M}' \mapsto \mathbb{R}$ beliebig, mit Positivteil $h^+ \geq 0$ und Negativteil $h^- \geq 0$, dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_h(\eta) &= \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}'_1} h(x, \eta) = \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}'_1} (h^+(x, \eta) - h^-(x, \eta)) \\ &= \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}'_1} h^+(x, \eta) - \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}'_1} h^-(x, \eta), \end{aligned}$$

also φ_h als Differenz zweier messbarer Abbildungen wieder messbar.

Damit ist der Induktionsanfang getan.

Induktionsschritt, $k > 1$: Es gelte die Induktionsvoraussetzung, d.h. $\eta \mapsto \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}'_{k-1}} h(x, \eta)$ ist messbar für beliebige messbare $h : \mathcal{M}'_{k-1} \times \mathcal{M}' \rightarrow \mathbb{R}$.

(α): Sei $h : \mathcal{M}'_k \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

Dann ist auch die Funktion

$$\begin{aligned} g : E \times \mathcal{M}'_{k-1} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (a, x) &\longmapsto 1_{\{(e, y) \in E \times \mathcal{M}'_{k-1} \mid e \notin y\}}(a, x) h(x + \delta_a), \end{aligned}$$

messbar:

Dazu brauchen wir, dass auf $\{(e, y) \in E \times \mathcal{M}'_{k-1} \mid e \notin y\}$ die Abbildung $(a, x) \mapsto h(x + \delta_a)$ messbar ist. Aber sowohl die Abbildung $\psi : (a, x) \mapsto x + \delta_a$ auf $\{(e, y) \in E \times \mathcal{M}'_{k-1} \mid e \notin y\}$ ist messbar, denn

$$\begin{aligned} &\psi^{-1} \{y \in \mathcal{M}'_k \mid \zeta_B(x) = l\} \\ &= \left[(B \times \{y \in \mathcal{M}'_{k-1} \mid \zeta_B(x) = l - 1\}) \cup (B^c \times \{y \in \mathcal{M}'_{k-1} \mid \zeta_B(x) = l\}) \right] \\ &\quad \cap \{(e, y) \in E \times \mathcal{M}'_{k-1} \mid e \notin y\} \end{aligned}$$

für $B \in \mathcal{B}_0(E)$, und h nach Voraussetzung eben auch. Also auch g .

(β) Sei nun allgemein $g : E \times \mathcal{M}_{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Somit ist auch

$$f : E \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(a, \eta) \longmapsto 1_{\{(e, \mu) \in E \times \mathcal{M} \mid e \in \mu\}}(a, \eta) \sum_{x \in (\eta - \delta_a) \cap \mathcal{M}_{k-1}} g(a, x),$$

messbar:

Zunächst sei bemerkt, dass die Menge

$$C := \{(e, \mu) \in E \times \mathcal{M} \mid e \in \mu\} \in \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{F}$$

messbar ist (siehe dazu [KMM74] Seite 107). Es reicht also für uns zu zeigen, dass die Abbildung

$$I_g : C \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(a, \eta) \longmapsto \sum_{x \subseteq (\eta - \delta_a) \cap \mathcal{M}_{k-1}} g(a, x),$$

messbar ist. Nun ist aber $I_g = \tilde{I}_g \circ m$ mit

$$m : C \longrightarrow E \times \mathcal{M},$$

$$(a, \eta) \longmapsto (a, \eta - \delta_a),$$

was offensichtlich messbar ist, und

$$\tilde{I}_g : E \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(a, \eta) \longmapsto \sum_{x \subseteq \eta \cap \mathcal{M}_{k-1}} g(a, x).$$

Es bleibt also zu zeigen, dass \tilde{I}_g messbar ist.

Sei dazu zuerst $g = 1_{A \times B}$ mit $A \in \mathcal{B}(E)$ und $B \in \mathcal{F}_{k-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{I}_g(a, \eta) &= \sum_{x \subseteq \eta \cap \mathcal{M}_{k-1}} g(a, x) = \sum_{x \subseteq \eta \cap \mathcal{M}_{k-1}} 1_A(a) 1_B(x) \\ &= 1_A(a) \sum_{x \subseteq \eta \cap \mathcal{M}_{k-1}} 1_B(x). \end{aligned}$$

Aber $(a, \eta) \mapsto 1_A(a)$ ist sicherlich messbar und $(a, \eta) \mapsto \sum_{x \subseteq \eta \cap \mathcal{M}_{k-1}} 1_B(x)$ ist messbar, da nach Induktionsvoraussetzung $\eta \mapsto \sum_{x \subseteq \eta \cap \mathcal{M}_{k-1}} 1_B(x)$ messbar ist. Damit ist aber für dieses g auch \tilde{I}_g messbar.

Ein monotonen-Klassen-Argument wie unter (γ) des Induktionsanfangs zeigt, dass man die Messbarkeit von \tilde{I}_g auf Funktionen $g = 1_A$ mit $A \in \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{F}_{k-1}$ erweitern kann. Da \tilde{I}_g linear in g ist, gilt die Messbarkeit dann auch für Elementarfunktionen und monotone Limiten davon. Erneut wegen der Linearität von \tilde{I}_g gilt dies dann auch für beliebige messbare g , indem man g in Positiv- und Negativteil zerlegt.

Damit ist dann auch die Messbarkeit von f gezeigt.

(γ) Sei nun wieder $h : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige messbare Funktion. Es ist

$$\varphi_h(\eta) = \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_k} h(x) = \frac{1}{k} \sum_{a \in \eta} \underbrace{\sum_{y \in (\eta - \delta_a) \cap \mathcal{M}_{k-1}} h(y + \delta_a)}_{\text{messbar nach } (\alpha)\text{-}(\beta)}$$

messbar nach Induktionsanfang.

(δ) Jetzt sei $h = 1_{A \times B}$ mit $A \in \mathcal{F}_k$ und $B \in \mathcal{F}$. Damit ist

$$\varphi_h(\eta) = \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_k} 1_A(x) 1_B(\eta) = \underbrace{1_B(\eta)}_{\text{messbar}} \underbrace{\sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_k} 1_A(x)}_{\text{messbar nach } (\gamma)}$$

messbar. Wieder lässt sich die Messbarkeit über ein monotonen-Klassen-Argument auf beliebige Indikatorfunktionen ausweiten. Wegen der Linearität von φ_h in h gilt es dann auch für Elementarfunktionen, monotone Limiten davon und letztendlich für beliebige messbare h . Der Induktionsschritt ist damit durchgeführt. \square

Damit haben wir dann auch:

Korollar A.1.7. *Es sei $h : \mathcal{M}_f \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{F}_f \otimes \mathcal{F}$ -messbare Abbildung. Dann ist auch*

$$\begin{aligned} \varphi_h : \mathcal{M} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \\ \eta &\longmapsto \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_f} h(x, \eta), \end{aligned}$$

eine \mathcal{F} -messbare Abbildung.

Beweis. Es gilt

$$\varphi_h(\eta) = \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_f} h(x, \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_k} h(x, \eta).$$

(Die Summen sollten sich hier wieder als endliche Summen vorgestellt werden, da sonst $\eta(\cdot \cap B_n, (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Lokalisierung, betrachtet wird.) Nach Lemma A.1.6 ist φ_h somit Summe messbarer Abbildungen, also selber messbar, sofern $1_{\mathcal{M}_k} h$ wieder $\mathcal{F}_k \otimes \mathcal{F}$ -messbar ist. Aber das ist klar, weil \mathcal{F}_k die Spur von \mathcal{F}_f bzgl. \mathcal{M}_k ist. \square

Und noch ein ähnliches Resultat:

Bemerkung A.1.8. Ist $h \in \mathcal{F}_+(E \times E)$, dann ist die Abbildung

$$E \times \mathcal{M} \ni (a, \eta) \longmapsto \int_E h(a, b) \eta(db)$$

messbar.

Beweis. Mit einem ähnlichen monotone Klassen Argument wie in Lemma A.1.6 kommt man zu diesem Ergebnis. \square

Mit dem Lemma A.1.6 und Korollar A.1.7 lässt sich nun die Messbarkeit der Abbildungen aus Kapitel 2 nachweisen.

Korollar A.1.9. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \text{cd}_D : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \\ \eta &\longmapsto \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_k} 1_D(x, \eta), \end{aligned}$$

ist messbar.

Beweis. Versehen wir $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ mit der Spur- σ -Algebra von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, so folgt die Messbarkeit direkt aus Lemma A.1.6. \square

Korollar A.1.10. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{M} \cap \{0 < \text{cd}_D < +\infty\} &\longrightarrow E, \\ \eta &\longmapsto \frac{1}{\text{cd}_D(\eta)} \sum_{x \in \eta \cap \mathcal{M}_k} 1_D(x, \eta) bx, \end{aligned}$$

ist messbar³.

Beweis. Nach [Bau92] Bemerkung 2 auf Seite 153 ist die Abbildung genau dann messbar, wenn alle Koordinatenprojektionen $\text{pr}_i \circ \chi : \mathcal{M} \cap \{0 < \text{cd}_D < +\infty\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, i = 1, \dots, d$ messbar sind. Dazu reicht es zu zeigen, dass $(x, \eta) \mapsto \text{pr}_i(1_D(x, \eta) bx) = 1_D(x, \eta) \text{pr}_i(bx)$ messbar ist für

³Auch hier ergibt sich der Fall einer Multi-Cluster-Eigenschaft durch leichte Modifikationen, so dass wir eine k -Cluster-Eigenschaft annehmen können.

$i = 1, \dots, d$, da dann Lemma A.1.6 greift. Es bleibt also zu beweisen, dass $\text{pr}_i \circ b$ eine messbare Abbildung von \mathcal{M}_k^i nach \mathbb{R} ist. Aber es ist

$$(\text{pr}_i \circ b)(x) = \frac{1}{k} \sum_{a \in x} \text{pr}_i(a) = \frac{1}{k} \int_E \text{pr}_i(a) x(da),$$

und somit $\text{pr}_i \circ b$ messbar nach Bemerkung A.1.4, da pr_i eine messbare Abbildung von E nach \mathbb{R} ist. \square

Cluster-Abbildungen, die einem Punktmaß $\eta \in \mathcal{M}(E)$ die Cluster darin zuordnen, sind ebenfalls messbar:

Bemerkung A.1.11. Es sei D eine Cluster-Eigenschaft in E und

$$\begin{aligned} \varphi_D : \mathcal{M}(E) &\longrightarrow \mathcal{M}\left(\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)\right) \\ \eta &\longmapsto \sum_{(x,\eta) \in D, x \subseteq \eta} \delta_x \end{aligned}$$

die zugehörige Cluster-Abbildung. Dann ist φ_D messbar.

Beweis. Da $\mathcal{F}\left(\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)\right) = \sigma(\zeta_{\mathcal{F}_B}, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d))$, reicht es nach Satz A.1.2 zu zeigen, dass die Abbildungen $\zeta_{\mathcal{F}_B} \circ \varphi_D, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ messbar sind. Aber wir haben

$$\begin{aligned} &\zeta_{\mathcal{F}_B} \circ \varphi_D(\eta) \\ &= \zeta_{\mathcal{F}_B} \left(\sum_{(x,\eta) \in D, x \subseteq \eta} \delta_x \right) \\ &= \sum_{(x,\eta) \in D, x \subseteq \eta} \delta_x(\mathcal{F}_B). \end{aligned}$$

Also ist φ_D nach Korollar A.1.7 messbar, wenn $h : (x, \eta) \mapsto \delta_x(\mathcal{F}_B)$ messbar ist. Nun nimmt h lediglich die Werte 0 und 1 an. Und es sind

$$\begin{aligned} h^{-1}(\{0\}) &= \{x \in \mathcal{M}_f(E) \mid \zeta_B(x) = 0\} \times \mathcal{M}(E) \in \mathcal{F}_f(E) \times \mathcal{F}(E), \\ h^{-1}(\{1\}) &= \{x \in \mathcal{M}_f(E) \mid \zeta_B(x) > 0\} \times \mathcal{M}(E) \in \mathcal{F}_f(E) \times \mathcal{F}(E). \end{aligned}$$

\square

Um die Messbarkeit der Laguerreschen Cluster-Eigenschaft nachzuweisen, brauchen wir noch folgende Bemerkung:

Bemerkung A.1.12. Es sei

$$\mathcal{C} := \{(e, \eta) \in E \times \mathcal{L} \mid e \in \eta\}.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^d), \\ (e, \eta) &\longmapsto L_\eta(e), \end{aligned}$$

ist messbar.

Beweis. Die zur Matheron-Topologie gehörige Borel- σ -Algebra wird erzeugt von Mengen des Typs

$$\mathcal{F}_G = \left\{ A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^d) \mid A \cap G \neq \emptyset \right\},$$

wobei G eine offene Menge in \mathbb{R}^d ist. Deswegen reicht es zu zeigen, dass

$$\psi^{-1}(\mathcal{F}_G) \in \mathcal{B}(E) \times (\mathcal{F}(E) \cap \mathcal{L}).$$

Nun ist

$$\psi^{-1}(\mathcal{F}_G) = \left\{ (e, \eta) \in \mathcal{C} \mid L_\eta(e) \cap G \neq \emptyset \right\}$$

Es gilt $L_\eta(e) = \bigcap_{f \in \eta} H^+(f, e)$, wobei

$$H^+(f, e) = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid (v - q(e))^2 - g(e) \leq (v - q(f))^2 - g(f) \right\}.$$

Deswegen ist

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\mathcal{F}_G) &= \left\{ (e, \eta) \in \mathcal{C} \mid H^+(f, e) \cap G \neq \emptyset \text{ für alle } f \in \eta \right\} \\ &= \left\{ (e, \eta) \in \mathcal{C} \mid \eta \left(1_{\mathcal{F}_G^c}(H^+(\cdot, e)) \right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ (e, \eta) \in \mathcal{C} \mid \eta \left(1_{\mathcal{F}_G}(H^+(\cdot, e)) \right) = 0 \right\} \end{aligned}$$

Nach A.1.8 gilt, dass für eine messbare Abbildung $h : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Funktion der Form $E \times \mathcal{M}(E)$, $(e, \eta) \mapsto \eta(h(\cdot, e))$ messbar ist. Für die Messbarkeit von ψ reicht es also zu zeigen, dass die Funktion $(e, f) \mapsto 1_{\mathcal{F}_G}(H^+(f, e))$ messbar ist. Da wiederum die Abbildung $A \mapsto 1_{\mathcal{F}_G}(A)$ eine messbare ist, reicht es zu zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \vartheta : E \times E &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^d), \\ (e, f) &\longmapsto H^+(f, e), \end{aligned}$$

messbar ist. Sei nun also wieder G eine offene Menge. Dann ist

$$\vartheta^{-1}(\mathcal{F}_0) = \{(e, f) \in E \times E \mid H^+(e, f) \cap G \neq \emptyset\} .$$

Nun trifft eine offene Menge einen abgeschlossenen Halbraum genau dann, wenn sie das Innere des Halbraums trifft, also ist

$$\begin{aligned} \vartheta^{-1}(\mathcal{F}_G) &= \{(e, f) \in E \times E \mid \mathring{H}^+(e, f) \cap G \neq \emptyset\} \\ &= \bigcap_{v \in G} \{(e, f) \in E \times E \mid v \in \mathring{H}^+(e, f)\} \\ &= \bigcap_{v \in G} \{(e, f) \in E \times E \mid (q(e) - v)^2 - g(e) < (q(f) - v)^2 - g(f)\} . \end{aligned}$$

Für $v \in G$ ist

$$\begin{aligned} \gamma_v : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (e, f) &\longmapsto (q(e) - v)^2 - (q(f) - v)^2 - g(e) + g(f) \end{aligned}$$

offensichtlich stetig in (e, f) . Aber dann ist

$$\vartheta^{-1}(\mathcal{F}_G) = \bigcup_{v \in G} \gamma_v^{-1}((-\infty, 0)) ,$$

also Vereinigung offener Mengen und somit selber offen. Aber offene Mengen sind Borelsch.

Somit ist ψ messbar. □

Bemerkung A.1.13. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_{D_{\mathcal{L}}} : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{M} \left(\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d) \right) \\ \eta &\longmapsto \sum_{(x, \eta) \in D_{\mathcal{L}}} \delta_{q(x)} , \end{aligned}$$

ist messbar.

Beweis. Es sei wieder $(n, \eta) \mapsto (e_n, \eta)$, $\eta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{e_n}$ eine messbare Indizierung. Für $\eta \in \mathcal{L}$ ist

$$\varphi_{D_{\mathcal{L}}}(\eta) = \sum_{e \in \eta} \delta_{\text{vert } L_\eta(e)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{\text{vert } L_\eta(e_n)} .$$

Da die Abbildungen vert nach [SW00], S. 236, und $(e, \eta) \mapsto L_\eta(e)$ nach Bemerkung A.1.12 messbar sind, ist auch $\varphi_{D_{\mathcal{L}}}$ messbar. □

Bemerkung A.1.14. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{dual} : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L}, \\ \eta &\longmapsto \eta^*, \end{aligned}$$

ist messbar. Hierbei sind

$$\eta^* := \sum_{e^* \in \text{supp } \eta^*} \delta_{e^*},$$

und

$$\text{supp } \eta^* := \left\{ \left(q^*, (q^* - q(e))^2 - g(e) \right) \mid e \in \eta, q^* \text{ ist Vertex von } L_\eta(e) \right\} \subseteq E.$$

Beweis. Sei $(n, \eta) \mapsto (e_n, \eta)$ eine messbare Indizierung. Für $\eta \in \mathcal{L}$ sei außerdem

$$\tilde{\eta}^* = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{v \in \text{vert } L_\eta(e_n)} \delta_{(v, (v - q(e_n))^2 - g(e_n))}.$$

Die Abbildung $\eta \mapsto \tilde{\eta}^*$ ist messbar, da die Abbildungen $(e, \eta) \mapsto \text{vert } L_\eta(e)$ messbar (vergl. A.1.13) und $E \times \mathbb{R}^d \ni (e, v) \mapsto (v, (v - q(e))^2 - g(e))$ stetig und somit messbar sind. Nun ist aber $\eta^* = \text{supp } \tilde{\eta}^*$, also dual ebenfalls messbar. \square

A.2. Messbarkeit bestimmter Mengen

Auch die Zugehörigkeit bestimmter Mengen zu gewissen σ -Algebren bedarf einiger Rechnung, wie hier en Detail an betimnten Beispielen verdeutlicht werden soll.

Bemerkung A.2.1. Die Menge $D := \{(x, x) \mid x \in X\}$ ist Element von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Beweis. Es seien $\tilde{\mathcal{B}}_0(X)$ die separierenden Mengen von X . (Insbesondere also messbare Mengen.) Dann gilt

$$D = \bigcap_{B \in \tilde{\mathcal{B}}_0(X)} (B \times B) \cup (B^c \times B^c). \quad (\text{A.1})$$

(Zur Veranschaulichung siehe Abbildung A.1.) \square

Bemerkung A.2.2. Die Menge $D \subseteq \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}$, definiert durch

$$(x, \eta) \in D \iff x = \delta_a, a \in E, \eta \left(\dot{B}_r(a) \right) = 0,$$

wie sie in Beispiel 2.1.5 (ii) definiert wird, ist eine Cluster-Eigenschaft.

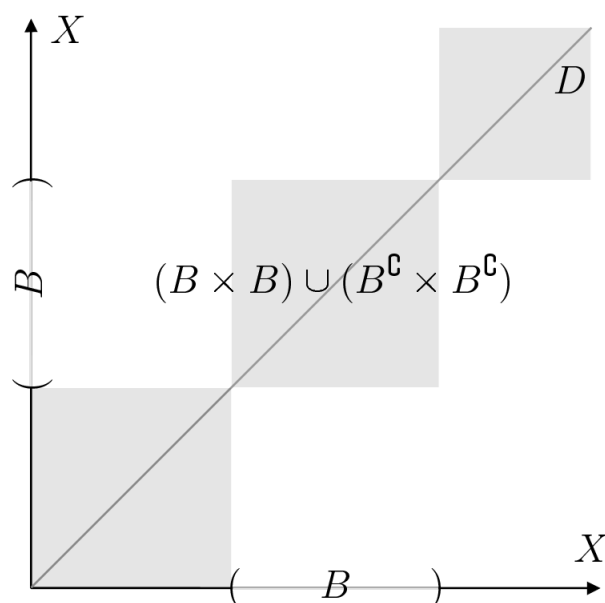


Abbildung A.1.: Der Schnitt aller solcher Mengen bildet die Diagonale

Beweis. Betrachten wir zunächst einmal folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \psi : E \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (a, \eta) &\longmapsto \eta(\dot{B}_r(a)). \end{aligned}$$

Dann ist

$$D = \psi^{-1}(\{0\}).$$

Da $\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist, reicht es, die Messbarkeit von ψ zu überprüfen. Es gilt

$$\psi(a, \mu) = \int_E 1_{\dot{B}_r(a)}(b) \mu(db).$$

Nach Bemerkung A.1.8 brauchen wir nun lediglich die Messbarkeit von

$$E \times E \ni (a, b) \longmapsto 1_{\dot{B}_r(a)}(b).$$

Aber es gilt

$$\begin{aligned} 1_{\dot{B}_r(a)}(b) &= 1_{B_r(a)}(b) - 1_{\{a\}}(b) \\ &= 1_B(a, b) - 1_D(a, b), \end{aligned}$$

wobei

$$B := \{(a, b) \in E \times E \mid |b - a| \leq r\}$$

und

$$D := \{(a, b) \in E \times E \mid a = b\}$$

die Diagonale in $E \times E$ ist. Nun ist B messbar, wegen der Stetigkeit der euklidischen Norm und die Diagonale D als abgeschlossene Menge ebenfalls. □

Nun kommen wir zu der Messbarkeit unserer geometrischen Konstruktionen in $E = \mathbb{R}^d$:

Bemerkung A.2.3. Es gilt

(i) $\mathcal{K}(E) \in \mathcal{F}_f(E)$ und

(ii) $\mathcal{S}(E) \in \mathcal{F}_f(E)$.

Beweis. Zu (i): Wir werden nun ausnutzen, dass die Vertizes eines konvexen Polytops eben mit den Extrempunkten übereinstimmen. Wir müssen nun zusätzlich ausnutzen, dass es verfeinernde Partitionen von E gibt.

Sei also $(\Lambda_{n,j})$ eine solche verfeinernde Folge von Partitionen. Sei weiterhin für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{K}_k := \left\{ (n, J) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k \left| \begin{array}{l} \text{Ist } J = (j_1, \dots, j_k), \text{ dann } j_l \neq j_m \text{ für } l \neq m, \text{ und} \\ \text{für jede Wahl von Punkten } e_{n,j} \in \Lambda_{n,j}, j \in J, \text{ und} \\ \text{jede Wahl von } i \in J \text{ gilt } e_{n,i} \notin \langle \{e_{n,j}; j \in J \setminus i\} \rangle \end{array} \right. \right\}.$$

Das heißt, wählt man Punkte $e_{n,j} \in \Lambda_{n,j}$, $j \in J$ und $(n, J) \in \mathcal{K}_k$, so ist natürlich die konvexe Hülle dieser Punkte ein konvexes Polytop, aber jeder Punkt ist gleichzeitig ein Extrempunkt, da er nicht konvex-Kombination der restlichen ist. Insbesondere hat also das davon erzeugte Polytop k Vertizes. Damit haben wir dann:

$$\mathcal{K}(E) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{(n, J) \in \mathcal{K}_k} \bigcap_{j \in J} \{x \in \mathcal{M}_f(E) \mid \zeta_{\Lambda_{n,j}}(x) = 1\} \cap \left\{ x \in \mathcal{M}_f(E) \mid \zeta_{(\bigcup_{j \in J} \Lambda_{n,j})^c}(x) = 0 \right\}.$$

Dies ist messbar, da \mathcal{K}_k eine abzählbare Menge ist.

Beim Beweis von (ii) gehen wir analog vor: Wir definieren für

$$\mathcal{S}_k := \left\{ (n, J) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k \left| \begin{array}{l} \text{Ist } J = (j_1, \dots, j_k), \text{ dann } j_l \neq j_m \text{ für } l \neq m, \text{ und} \\ \text{für jede Wahl von Punkten } e_{n,j} \in \Lambda_{n,j}, j \in J, \text{ sind} \\ \text{die Punkte } e_{n,j} \text{ affin unabhängig} \end{array} \right. \right\}.$$

Und da in \mathbb{R}^d höchstens $d + 1$ Punkte affin unabhängig sind, haben wir

$$\mathcal{S}(E) = \bigcup_{k=1}^{d+1} \bigcup_{(n,J) \in \mathcal{S}_k} \bigcap_{j \in J} \{x \in \mathcal{M}_f(E) \mid \zeta_{\Lambda_{n,j}}(x) = 1\} \cap \left\{x \in \mathcal{M}_f(E) \mid \zeta_{(\bigcup_{j \in J} \Lambda_{n,j})^c}(x) = 0\right\}.$$

□

Symbolverzeichnis

$A \dot{\cup} B$	die disjunkte Vereinigung zweier Mengen A, B	1
A^c	das Komplement einer Menge A	1
$A \setminus B$	die Differenz zweier Mengen A, B	1
\mathbb{R}	die reellen Zahlen	1
\mathbb{R}^d	der d -dimensionale euklidische Vektorraum	1
$ r $	der Betrag einer reellen Zahl r	1
$ v $	die euklidische Norm eines Vektors $v \in \mathbb{R}^d$	1
\mathbb{R}^+	die positiven reellen Zahlen	1
\mathbb{R}_0^+	die nichtnegativen reellen Zahlen	1
\mathbb{N}	die natürlichen Zahlen	1
\mathbb{N}_0	die natürlichen Zahlen zusammen mit der Null	1
\mathbb{Z}	die ganzen Zahlen	1
\mathbb{Q}	die rationalen Zahlen	1
$B_r(a)$	die abgeschlossene Kugel um a mit Radius r	1
$\mathring{B}_r(a)$	die offene Kugel um a mit Radius r	1
$\mathring{B}_r(a)$	die abgeschlossene, punktierte Kugel um a mit Radius r	1
$\text{diam } B$	der Durchmesser einer Menge B	1
$S^{d-1}(\mathbb{R}^d)$	die $(d-1)$ -dimensionale Einheitssphäre in \mathbb{R}^d	1
\mathring{M}	die Menge der inneren Punkte der Menge M	1
∂M	der Rand der Menge M	1
$v \cdot u$	das Skalarprodukt der Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^d$	1
v^2	das Skalarprodukt eines Vektors $v \in \mathbb{R}^d$ mit sich selber	1
$\mathcal{F}_+(X)$	die positiv reellwertigen messbaren Funktionen auf X	2
1_B	die Indikatorfunktion zur Menge B	2
$T\mu, \mu \circ T^{-1}$	das Bild eines Maßes μ unter einer Abbildung T	2
$f \otimes g$	das Tensorprodukt zweier Abbildungen f, g	2
(X, \mathcal{A})	ein messbarer Raum	3
$\mathcal{B}(X)$	die beschränkten Mengen von X	3

$\mathcal{B}_0(X)$	die beschränkten messbaren Mengen von X	4
$(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$	ein (abzählbar separierter) σ -beschränkter messbarer Raum	4, 5
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	die Borelmengen des \mathbb{R}^d	5
$\mathcal{B}(\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, n)$	die durch die Systeme $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, n$ erzeugten beschränkten Mengen	7
μ, ν, η, ρ	lokalendliche Maße	7
$\mathcal{M}(X)$	die Menge der lokalendlichen Maße auf X	7
μ_N	das Nullmaß	7
ζ_B	die Funktion, die einem Maß das entsprechende Maß der Menge B zuordnet	8
$\mathcal{F}(X)$	die Standard- σ -Algebra zu $\mathcal{M}(X)$	8
$\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$	die Zählmaße auf X	8
$\mathcal{M}^{\cdot}(X)$	die einfachen Zählmaße auf X	8
$\mathcal{M}^{\circ}(X)$	die diffusen Maße auf X	8
$\mathcal{F}^{\cdot\cdot}(X)$	die Standard- σ -Algebra zu $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$	8
$\mathcal{F}^{\cdot}(X)$	die Standard- σ -Algebra zu $\mathcal{M}^{\cdot}(X)$	8
$\mathcal{F}^{\circ}(X)$	die Standard- σ -Algebra zu $\mathcal{M}^{\circ}(X)$	8
δ_x	das Dirac-Maß mit Masse in x	9
$\text{supp } \mu$	der Träger von μ	9
$\mu \otimes \nu$	das zu μ, ν gehörige Produktmaß	11
μ^n	das n -fache Produkt des Maßes μ	11
P	eine Wahrscheinlichkeit	15
$\mathcal{P}\mathcal{M}(X)$	die zufälligen Maße in X	15
$\mathcal{P}\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$	die Punktprozesse in X	15
$\mathcal{P}\mathcal{M}^{\cdot}(X)$	die einfachen Punktprozesse in X	15
ν_P	das Intensitätsmaß einer Wahrscheinlichkeit P	15
T_x	die Translation um x	16
$A + x$	die um x verschobene Menge A	16
$\mu - x$	das Bild eines Maßes μ unter der Translation um x	16
$\mathcal{P}_0\mathcal{M}(X)$	die stationären zufälligen Maße in X	16
$\mathcal{P}_0\mathcal{M}^{\cdot\cdot}(X)$	die stationären Punktprozesse in X	16
$\mathcal{P}_0\mathcal{M}^{\cdot}(X)$	die stationären einfachen Punktprozesse in X	16
\mathcal{C}_P	Das Campbell-Maß zu einer Wahrscheinlichkeit P	17
P_ρ	der Poissonsche Punktprozess mit Intensität ρ	19
λ	Das Lebesgue-Maß in \mathbb{R}^d	20

$\mathcal{M}_f(X)$	die endlichen einfachen Punktmaße in X	24
$\mathcal{M}_k(X)$	die k -elementigen einfachen Punktmaße in X	24
$\mathcal{F}_f(X)$	die Spur von $\mathcal{F}(X)$ in $\mathcal{M}_f(X)$	24
$\mathcal{F}_k(X)$	die Spur von $\mathcal{F}(X)$ in $\mathcal{M}_k(X)$	24
\mathcal{P}	eine Partition	24
$(\Lambda_{ni})_{i,n \in \mathbb{N}}$	eine verfeinernde Folge von Partitionen	24
\mathcal{F}_A	je nach Kontext die Menge der endlichen Punktmaße, die Punkte in der Menge A besitzen oder die Menge der abgeschlossenen Mengen, die einen nichtleeren Schnitt mit der Menge A besitzen	25
\mathcal{F}^A	die Menge der endlichen Punktmaße, die keine Punkte in der Menge A besitzen oder die Menge der abgeschlossenen Mengen, die einen leeren Durchschnitt mit A besitzen	25
$\mathcal{A}(E)$	die abgeschlossenen Mengen von E	25
$\sigma_{\mathcal{A}(E)}$	die Borel- σ -Algebra bzgl. der Matheron-Topologie auf den abgeschlossenen Mengen von E	25
D	eine Cluster-Eigenschaft	29
D_k	eine auf k -Cluster beschränkte Multi-Cluster-Eigenschaft	29
cd_D	die Clusterzählfunktion zu einer Cluster-Eigenschaft D	30
φ_D	die Cluster-Funktion zu einer Cluster-Eigenschaft D	31
bx	das Baryzentrum einer Punktconfiguration x	33
\mathcal{M}_D	die Menge der einfachen Punktmaße, die unendlich viele Cluster enthalten	35
P_D	ein durch die Menge der einfachen Punktmaße, die mindestens ein Cluster enthalten, bedingter einfacher Punktprozess	35
$P_{\rho,D}$	durch die Konfigurationen mit unendlich vielen Clustern bedingter Poisson-Punktprozess mit Intensität ρ	36
$\langle \mathbf{a} \rangle$	die konvexe Hülle einer Menge \mathbf{a}	39
$\langle x \rangle$	die konvexe Hülle des Trägers einer Konfiguration $x \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$	39
ext \mathbf{k}	die Extrempunkte einer konvexen Menge \mathbf{k}	40
H^+, H^-	abgeschlossene Halbräume in \mathbb{R}^d	40

$H^+(\alpha, u), H^-(\alpha, u)$	Halbräume in \mathbb{R}^d , bestimmt durch die Parameter α und u	40
H	eine Hyperebene in \mathbb{R}^d	40
$H(\alpha, u)$	eine Hyperebene in \mathbb{R}^d , genauer spezifiziert durch α und u	40
$\exp \mathbf{k}$	die exponierten Punkte einer konvexen Menge \mathbf{k}	40
$\text{vert } \mathbf{p}$	die Vertizes eines konvexen Polytops \mathbf{p}	41
$\mathcal{H}(E)$	die Menge der diskreten konvexen Polytope in E	41
$\mathcal{S}(E)$	die Menge der diskreten Simplizes in E	44
$K(x)$	die Umkugel eines diskreten Simplex x	45
$S(x)$	der Rand der Umkugel eines diskreten Simplex x	45
$\mathbb{M}(E)$	die Menge der lokal endlichen Mosaike in E	46
$\mathbb{M}_v(E)$	die Menge der vollständigen lokal endlichen Mosaike in E	46
$\mathbb{M}^s(E)$	die Menge der simplizialen lokal endlichen Mosaike in E	48
$\mathbb{M}_v^s(E)$	die Menge der vollständigen simplizialen lokal endlichen Mosaike in E	48
$e = (q, g)$	die Elemente des markierten Raumes $E = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$	49
$\mathcal{B}_m(E)$	die Menge der metrisch beschränkten Mengen in E	49
q	ein Punkt im Ortsraum oder als Abbildung die Projektion in den Ortsraum oder auf die lokal endlichen Maße im Ortsraum	50
g	das Gewicht eines Punktes oder als Abbildung die Projektion in den Marken- bzw. Gewichtsraum	50
$\mathcal{B}_Z(E)$	die von den Zylindermengen in E erzeugten beschränkten Mengen	51
s	die symmetrische Form auf $E \times E$, die zur Konstruktion der Laguerreschen Bereiche benötigt wird	51
$p(f)$	der Paraboloid zu einem Punkt f in E	51
$\mathcal{B}_P(E)$	die durch die Paraboloiden erzeugten beschränkten Mengen in E	52
\mathcal{B}_L	die beschränkten Mengen des Laguerreschen Phasenraums	54
$L_\eta(e)$	der zu e in η gehörige Laguerresche Bereich	57
$V_\mu(q)$	die zu q in μ gehörige Voronoi-Zelle	57
\mathcal{L}	die Menge der Laguerreschen Punktmaße	60

$H^+(e', e)$	der Halbraum in \mathbb{R}^d , der durch die Punkte e und $e' \in E$ bestimmt ist	65
$D_{\mathcal{L}}$	die Laguerresche Cluster-Eigenschaft	67
$\varphi_{D_{\mathcal{L}}}$	die zu $D_{\mathcal{L}}$ gehörige Clusterfunktion	69
$H(e', e)$	die Hyperebene in \mathbb{R}^d , die durch die Punkte e und $e' \in E$ bestimmt ist	70
η^*	das duale zu einem regulären Punktmaß	73
dual	die Abbildung, die einem regulären Punktmaß sein duales zuordnet	73
$d_{\mu}(q^*)$	eine Delaunay-Zelle in der Konfiguration $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$	77
D_R	die Cluster-Eigenschaft der radius-beschränkten Delaunay-Cluster	79
\mathcal{M}_{D_R}	die einfachen Punktmaße in E , die unendlich viele D_R -Cluster enthalten	81
$\text{cd}_{D_R} \eta$	die Funktion, die die radius-beschränkten Delaunay-Cluster in einer Punktconfiguration η zählt	81
φ_{D_R}	die Clusterfunktion zur Cluster-Eigenschaft D_R	82

Literaturverzeichnis

(Die Zahlen am Ende einer Literaturangabe entsprechen den Seiten auf denen in dieser Arbeit auf sie verwiesen wird.)

- [Arv76] ARVESON, WILLIAM: *An Invitation to C*-Algebras*. Springer Verlag, 1976. 24
- [Aur87] AURENHAMMER, F.: *Power Diagrams: Properties, Algorithms and Applications*. SIAM Journal for Computation, 16:78–96, 1987. 56
- [Bau92] BAUER, HEINZ: *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter Lehrbuch, 2. Auflage, 1992. 1, 7, 12, 16, 20, 34, 55, 97, 106
- [Bil86] BILLINGSLEY, PATRICK: *Probability and Measure*. John Wiley & sons, Inc., 1986. 19
- [Blo97] BLOCH, ETHAN D.: *A first course in geometric topology and differential geometry*. Birkhäuser, 1997. vii, 43
- [Brø83] BRØNSTED, ARNE: *An Introduction to Convex Polytopes*. Springer-Verlag, 1983. 39, 41, 43, 45, 46
- [Fis97] FISCHER, GERD: *Lineare Algebra*. Vieweg Verlag, 1997. 1
- [FLM00] FERREZ, JEAN-ALBERT, THOMAS M. LIEBLING und DIDIER MÜLLER: *Dynamic Triangulations for Granular Media Simulations*. Lecture Notes in Physics Vol. 554: Statistical Physics and Spatial Statistics. The Art of Analyzing and Modeling Spatial Structures and Pattern Formation, 554:394ff, 2000. 57
- [For99a] FORSTER, OTTO: *Analysis 1*. Vieweg Verlag, 1999. 1
- [For99b] FORSTER, OTTO: *Analysis 2*. Vieweg Verlag, 1999. 1
- [Grü67] GRÜNBAUM, BRANKO: *Convex Polytopes*. John Wiley & Sons, 1967. vii, 39, 41, 43
- [Hee72] HEER, C. V.: *Statistical Mechanics, Kinetic Theory, and Stochastic Processes*. Academic Press, Inc., 1972. 19

- [Kal02] KALLENBERG, OLAV: *Foundations of Modern Probability*. Springer, 2. Auflage, 2002. 97
- [KMM74] KERSTAN, JOHANNES, KLAUS MATTHES und JOSEPH MECKE: *Unbegrenzt teilbare Punktprozesse*. Akademie-Verlag Berlin, 1974. 7, 11, 68, 80, 100, 101, 104
- [KMM78] KERSTAN, JOHANNES, KLAUS MATTHES und JOSEPH MECKE: *Infinitely Divisible Point Processes*. John Wiley & sons, Inc., 1978. 19, 20
- [Mat75] MATHERON, GEORGES: *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley & sons, Inc., 1975. viii, 5, 25, 89
- [McM94] McMULLEN, PETER: *Duality, Sections and Projections of Certain Euclidean Tilings*. In: *Geometriae Dedicata*, Band 49, Seiten 183 – 202. Springer Netherlands, 1994. 59
- [Mec67] MECKE, JOSEPH: *Stationäre zufällige Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 9:36–58, 1967. 20
- [OBS92] OKABE, ATSUYUKI, BARRY BOOTS und KOKICHI SUGIHARA: *Spatial Tessellations*. John Wiley & sons, Inc., 1992. vii, 80
- [Rip76] RIPLEY, B.D.: *Locally finite random sets: foundations for point process theory*. Ann. Probability, 4(6):983–994, 1976. viii, 3
- [Sch93a] SCHLOTTMANN, MARTIN: *Geometrische Strukturen quasiperiodischer Strukturen*. Doktorarbeit, Fakultät für Physik der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen, 1993. viii, ix, xi, 52, 56, 57, 59, 60, 73, 77
- [Sch93b] SCHULTE, EGON: *Tilings*. In: *Handbook of Convex Geometry*, Seiten 899–932. Elsevier Science Publishers B.V., 1993. vii
- [SKM95] STOYAN, DIETRICH, WILFRIED S. KENDALL und JOSEPH MECKE: *Stochastic Geometry and its Applications*. John Wiley & sons, Inc., 2nd Auflage, 1995. 31, 32
- [SW00] SCHNEIDER, R. und W. WEIL: *Stochastische Geometrie*. B. G. Teubner Stuttgart - Leipzig, 2000. viii, 3, 5, 25, 49, 57, 59, 68, 73, 100, 109
- [tD91] DIECK, TAMMO TOM: *Topologie*. de Gruyter Lehrbuch, 1991. 5
- [Wik] WIKIPEDIA: *Tessellations and computer graphics*. <http://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation>. Seitenaufruf am 11.8.06. vii

- [Zes05a] ZESSIN, HANS: *The Gibbs cluster process*. Preprint, Fakultät für Mathematik d. Universität Bielefeld, 2005. viii, 29, 79
- [Zes05b] ZESSIN, HANS: *Vorlesung über Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*. Universität Bielefeld, WS 2004/2005. 3, 19
- [Zes06] ZESSIN, HANS: *Vorlesung über stochastische Geometrie*, WS2005/2006. 3, 79

Index

- abzählbar separiert, 5
- Baryzentrum, 33
- beschränkte Mengen, 3
 - erzeugte, 7
- Campbell-Maß, 16
- Cluster, 29
 - Eigenschaft, 29
 - translationsinvariant, 30
 - Prozess, 32
 - zählfunktion, 30
 - in einem Punktmaß, 29
 - radius-beschränkte Delaunay-, 80
 - zu einem Punktmaß, 29
- Delaunay-Eigenschaft, 79
- Delaunay-Zelle, 77
- dual, 73
- endliche Reichweite, 36
- exponierte Punkte, 40
- Extremalpunkt, 40
- Halbraum, 40
- hereditär, 3
- Hyperebene, 40
 - Stütz-, 40
- Intensität, 15
- Intensitätsmaß, 15
 - konvex, 39
 - konvexe Hülle, 39
 - konvexes Polytop, 40
- Laguerrescher Phasenraum, 54
- Laguerrescher Bereich, 57
- Laguerresches Punktmaß, 60
- Lokalisierung, 4
- Maß
 - atomfreies, 8
 - diffuses, 8
 - lokal endliches , 7
 - zufälliges, 15
 - stationäres, 16
- Marke, 49
- Matheron-Topologie, 25
- Mecke-Formel, 20
- messbarer Raum
 - σ -beschränkter, 4
- Momentenmaß
 - erstes, 15
- Mosaik
 - lokal endliches, 45
 - simplizial, 48
 - vollständig, 48
 - vollständiges, 46
 - zufälliges, 48, 49
 - Laguerresches, 71
 - simpliziales, 48

- vollständiges, 48
- Null-Unendlich-Gesetz, 32
- Ort, 49
- Paraboloid zu einem Punkt, 51
- Partition, 24
 - verfeinernde Folge, 24
- Phasenraum, 5
 - Laguerrescher, 54
- Poisson-Laguerre-Prozess, 72
 - dualer, 78
- Poisson-Voronoi-Mosaik, 72
- Polytop, 40
 - diskretes, 41
- Punktfigurationen, 8
- Punktmaß, 8
 - Laguerresches, 60
 - einfaches, 8
- Punktprozess, 15
 - einfacher, 15
- regulär, 60
- Seite, 40
 - Dimension einer, 40
 - uneigentliche, 40
- seitentreu, 48
- separierende Menge, 5
- Simplex, 43
 - diskreter, 43
- Spur-Phasenraum, 6
- stationär, 16
- Träger eines Zählmaßes, 9
- translations-invariant, 16
- Voronoi-Zelle, 57
- Zählfunktionen, 8
- Zählmaß, 8
 - einfaches, 8
- Zellen eines Mosaiks, 46
- Zentrum, 57
- Zylinder-Mengen, 50