ALGEBRA I
1. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
MARTIN KALCK

Aufgabe 1. (1+1+2 Punkte) Wir betrachten folgende Verknüpfung auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:

$$\square\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}, \quad y\,\square\,z := y+z+y^2z.$$

(a) Zeigen Sie, dass es genau ein neutrales Element $e\in\mathbb{C}$ bezüglich der Verknüpfung $\square$ gibt.
(b) Überlegen Sie sich welche $z\in\mathbb{C}$ ein Linksinverses und welche $z\in\mathbb{C}$ ein Rechtsinverses bezüglich $\square$ besitzen.
(c) Ist $\mathbb{C}$ mit der Verknüpfung $\square$ eine Gruppe?

Aufgabe 2. (1+1+2 Punkte) Seien U und V Untergruppen einer Gruppe G.

(a) Zeigen Sie, dass $U\cap V$ eine Untergruppe von G ist.
(b) Wir definieren die folgenden Teilmengen von G

$$UV := \{uv \mid u\in U \text{ und } v\in V\}$$
$$VU := \{vu \mid u\in U \text{ und } v\in V\}.$$

Zeigen Sie, dass UV genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $UV = VU$ gilt.
(c) Geben Sie ein Beispiel von Untergruppen U und V einer Gruppe G an, so dass UV keine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte) Sei $f\colon G\to H$ ein Gruppenhomomorphismus mit

$$\text{Kern}\quad K := \ker f := \{x\in G \mid f(x)=e_H\} \quad \text{und}$$
$$\text{Bild}\quad B := \operatorname{im} f := \{y\in H \mid y=f(x) \text{ für ein } x\in G\}.$$

Hier bezeichnet e_H das neutrale Element in H.

Sei nun U eine Untergruppe von G und V eine Untergruppe von H.

(a) Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:
(i) $f^{-1}\big(f(U)\big) = UK$ und
(ii) $f\big(f^{-1}(V)\big) = V\cap B$.
Dabei ist UK wie in Aufgabe 2 definiert.
(b) Folgern Sie, dass f eine Bijektion zwischen der Menge der Untergruppen von G, die K enthalten, und der Menge der Untergruppen von B induziert.

Abgabe: Montag, 15. April 2013, bis 14 Uhr in die Postfächer der Tutoren in V3-126.