ALGEBRA I
3. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
MARTIN KALCK

Aufgabe 1. (1+3 Punkte)

(a) Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{Q}) := \{M \in M_n(\mathbb{Q}) \mid \det(M) > 0\}$$
zusammen mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

(b) Wir fixieren eine natürliche Zahl $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{Q})$ und $\big(M_n(\mathbb{Q}), +\big)$ *nicht* isomorph sind.

Aufgabe 2. (2 + 2 Punkte)

(a) Sei $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen der Menge der Linksnebenklassen G/U und der Menge der Rechtsnebenklassen $U\backslash G$ gibt.

(b) Seien $U, V \subseteq G$ endliche Untergruppen mit $\mathsf{ggT}\big(|U|, |V|\big) = 1$, wobei $|U|$ und $|V|$ die Kardinalitäten von U bzw. V bezeichnen. Zeigen Sie, dass $U \cap V = \{e\}$ die triviale Untergruppe ist.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte)

(a) Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\begin{aligned}\Psi\colon \{\text{Teiler } d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ von } m\} &\longrightarrow \{\text{Untergruppen von } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\}\\ d &\longmapsto d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\end{aligned}$$
wohldefiniert und bijektiv ist. Insbesondere ist also jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch.

Hinweis: Ein Blick auf Übungzettel 1 könnte sich lohnen...

(b) Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass man für U *höchstens* soviele Erzeuger benötigt wie für G.

Insbesondere ist also jede Untergruppe von G wieder endlich erzeugt.

Idee: Nutzen Sie Teil (a) für eine Induktion über die Zahl der Erzeuger von G!

Abgabe: Montag, 29. April 2013, bis 14 Uhr in die Postfächer der Tutoren in V3-126.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte)

Sei im folgenden G eine Gruppe mit Untergruppen U und V von endlichem Index.

(a) Angenommen $U \subseteq V$. Zeigen Sie die folgende Gleichung:

$$[G:U] = [G:V] \cdot [V:U].$$

(b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen folgende Ungleichung gilt:

$$[G:U \cap V] \leq [G:U] \cdot [G:V].$$

Hinweis: Zeigen Sie Wohldefiniertheit und Injektivität der Abbildung

$$\begin{aligned} G/(U \cap V) &\longrightarrow G/U \times G/V \\ g(U \cap V) &\longmapsto (gU, gV) \end{aligned}$$