Maß- und Integrationstheorie

Katharina von der Lühe
Nora Müller

SS 2016

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag 25.8.2016, 12 Uhr

Aufgabe 1 (Bemerkung 2.3. (i)). *(2+4 Punkte)*

(a) *Zeigen Sie: Ein System von Teilmengen $\mathcal{A}$ einer Grundmenge Ω ist genau dann eine σ-Algebra, wenn gilt*

$$\Omega \in \mathcal{A} \quad \textit{und} \quad A^{\complement} \in \mathcal{A} \textit{ für } A \in \mathcal{A} \quad \textit{und} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \textit{ für } A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}.$$

Folgern Sie daraus,

(b) *Seien $\mathcal{A}_i$ σ-Algebren auf Ω_i, $i = 1, 2$, und $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass*

$$\hat{\mathcal{A}}_1 := \{T^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{A}_2\} \quad \textit{und} \quad \hat{\mathcal{A}}_2 := \{B \subseteq \Omega_2 \mid T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$$

σ-Algebren auf Ω_1 bzw. Ω_2 sind.

Aufgabe 2 (Bemerkung 2.3. (iv)). *(4 Punkte)*

Sei $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen einer Grundmenge Ω. Zeigen Sie, dass es einen kleinsten Ring $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ auf Ω gibt, der $\mathcal{E}$ enthält.

Aufgabe 3 (Bemerkung 2.13.). *(2+2+2+2+2 Punkte)*

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über einer Menge Ω und μ ein additives Maß auf $\mathcal{R}$. Zeigen Sie für $A, B, A_1, ..., A_N \in \mathcal{R}$:

(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
(b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ *für* $A \subseteq B$
(c) $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$, *falls* $A \subseteq B$ *und* $\mu(A) < \infty$
(d) $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$
(e) *Für $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Satz 2.14.). *(3+3 Punkte)*
Sei Ω eine unendliche Menge.

(a) Sei Ω abzählbar und sei durch

$$\mathcal{A}_1 := \{A \subset \Omega \mid A \text{ oder } A^\complement \text{ ist endlich}\}$$

eine Algebra auf Ω definiert. Zeigen Sie, dass die durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ +\infty, & \text{falls } A^\complement \text{ endlich} \end{cases}$$

*definierte Funktion $\mu\colon \mathcal{A}_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein additives, aber **kein** σ-additives Maß ist.*

(b) Sei Ω überabzählbar und sei durch

$$\mathcal{A}_2 := \{A \subset \Omega \mid A \text{ oder } A^\complement \text{ ist abzählbar}\}$$

eine Algebra auf Ω definiert. Zeigen Sie, dass die durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1, & \text{falls } A^\complement \text{ abzählbar} \end{cases}$$

definierte Funktion $\mu\colon \mathcal{A}_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Maß ist.

Postfächer in V3-128 (Kopierraum)	
Daniel Röwe:	217
Nora Müller:	129