Maß- und Integrationstheorie

Katharina von der Lühe
Nora Müller **SS 2016**

Blatt 2

Abgabe: Donnerstag 1.9.2016, 12 Uhr

Aufgabe 1 (Beweis Beispiel 2.12 (ii)). *(4 Punkte)*

Sei $(K_n)_{n\geq 1}$ eine Folge kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ mit

$$\bigcap_{n=1}^{N} K_n \neq \emptyset \quad \forall\, N \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{R})$ die in Definition 2.5 definierte Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}^d$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die kleinste σ-Algebra ist, die eines (und jedes) der folgenden Mengensysteme enthält:

(i) alle Quader der Form $]a,b]$ ($[a,b]$, bzw. $]a,b[$) für $a = (a_1,...,a_d), b = (b_1,...,b_d)$ mit $-\infty < a_i \leq b_i < +\infty, 1 \leq i \leq d$
(ii) alle offenen Mengen des $\mathbb{R}^d$
(iii) alle abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{R}^d$

Aufgabe 3 (Theorem 2.20). *(2+1+1 Punkte)*

Sei m das 1-dimensionale Lebesgue-Maß. Zeigen Sie, dass

(a) $m^*(J) = b - a$, falls $J = [a,b]$ (oder $]a,b[$, bzw. $]a,b]$) für $-\infty < a \leq b < +\infty$
(b) $m^*(J) = \infty$, falls J ein unbeschränktes Intervall in $\mathbb{R}$ ist, oder $J = \mathbb{R}$
(c) $m^*(A) > 0$ für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit nicht-leerem Inneren

Aufgabe 4 (Definition 2.18, Theorem 2.20). *(2+2 Punkte)*

Sei m das d-dimensionale Lebesgue-Maß. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2, dass für eine Menge N folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $m^*(N) = 0$
(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge von Quadern $]a_n, b_n[, n \geq 1$, so dass

$$N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{d} (b_{n,i} - a_{n,i}) < \varepsilon$$

für $a_n = (a_{n,1},...,a_{n,d})$ und $b_n = (b_{n,1},...,b_{n,d})$, $n \geq 1, 1 \leq i \leq d$.

Bitte wenden!

Maß- und Integrationstheorie

Katharina von der Lühe **SS 2016**
Nora Müller

Aufgabe 5 (Definition 4.1). *(1+2+1 Punkte)*
Seien $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$.

(a) *Zeigen Sie: Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})/\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2})$-messbar*
(b) *Zeigen Sie: Jede monoton wachsende Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar*
(c) *Geben Sie eine $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nicht stetig und nicht monoton wachsend ist.*

Aufgabe 6 (Vollständige Maßräume). *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine μ-Nullmenge ist eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$. Der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt ***vollständig****, falls jede Teilmenge einer μ-Nullmenge in $\mathcal{A}$ liegt.*

Zeigen Sie: Ist μ^* ein äußeres Maß und $\mathcal{A}_{\mu^*}$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen, dann ist $(\Omega, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}})$ vollständig.

Aufgabe 7 (Vervollständigung von Maßräumen). *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ein Maßraum $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ mit $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$ und $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ heißt ***Vervollständigung von*** *$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, falls $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ vollständig ist und falls für jeden vollständigen Maßraum $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ mit $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ folgt, dass $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mu}|_{\bar{\mathcal{A}}} = \bar{\mu}$ gilt.*

Zeigen Sie, dass jeder Maßraum eine Vervollständigung hat, indem Sie die von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{N} := \{N : N \subseteq M, M \in \mathcal{A} \text{ Nullmenge}\}$ erzeugte σ-Algebra betrachten.

Aufgabe 8 (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes - Theorem 4.8). *(1+3 Punkte)*
Für $d \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^d$ und $r \in \mathbb{R}$ definiere

$$T_a\colon \begin{array}{ll} \mathbb{R}^d & \to \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto T_a(x) := x + a \end{array} \qquad \text{und} \qquad H_r\colon \begin{array}{ll} \mathbb{R}^d & \to \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto H_r(x) := r \cdot x \end{array}$$

Zeigen Sie:

(a) *Die Abbildungen T_a und H_r sind $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-messbar.*
(b) *Es gilt $m^*(B) = m^*(a + B)$ und $|r|^d \cdot m^*(B) = m^*(r \cdot B)$ für alle $B \subseteq \mathbb{R}^d$. Hierbei ist $a + B := T_a(B)$ und $r \cdot B := H_r(B)$ für alle $B \subseteq \mathbb{R}^d$.*

Postfächer in V3-128 (Kopierraum)	
Daniel Röwe:	217
Nora Müller:	129