Maß- und Integrationstheorie

Katharina von der Lühe
Nora Müller

SS 2016

Blatt 4

Abgabe: Donnerstag 15.9.2016, 12 Uhr

Aufgabe 1 (Definition 8.1, Theorem 8.6). *(2+2 Punkte)*

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ *mit* $x \mapsto x^\alpha \sin(x)$ *ist Lebesgue-integrierbar über* $]0,\infty[$ *für* $-2<\alpha<-1$.

(b) Die Abbildung $h\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *mit*

$$x \mapsto \exp(-\alpha x)\Big(\frac{\sin(x)}{x}\Big)^3$$

ist Lebesgue-integrierbar über $[0,\infty[$ *für alle* $\alpha > 0$.

Aufgabe 2 (zur Bemerkung 8.7). *(2+2 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Abbildung $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *mit*

$$x \mapsto \mathbb{1}_{[0,\infty[}\frac{\sin(x)}{x}$$

(a) Riemann-integrierbar ist über $\mathbb{R}$,

(b) jedoch nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 3 (vgl. Definition 9.5). *(4 Punkte)*

Seien $a,b\in\mathbb{R}$ *mit* $a<b$ *und sei* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *eine Funktion. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:*

(i) $\forall\ x,y\in\ ]a,b[,\ \forall\ \lambda\in\ ]0,1[$ *gilt* $f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\geq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

(ii) $\forall\ l\in\mathbb{N},\ \forall\ x_1,...,x_l\in\ ]a,b[,\ \forall\ \lambda_1,...,\lambda_l\in\ ]0,1[$ *mit* $\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i=1$ *gilt*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i x_i\Big)\geq \sum_{i=1}^{l}\lambda_i f(x_i)$$

Aufgabe 4 (Theorem 9.6). *(2+2 Punkte)*

Sei $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ *ein Maßraum. Zeigen Sie, dass für* $1\leq p,q<\infty$ *mit* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *gilt:*

(a) $f\in\mathcal{L}^p(\mu), g\in\mathcal{L}^q(\mu) \quad\Rightarrow\quad f\cdot g\in\mathcal{L}^1(\mu)$

(b) $f\in\mathcal{L}^p(\mu), g\in\mathcal{L}^\infty(\mu) \quad\Rightarrow\quad f\cdot g\in\mathcal{L}^p(\mu)$

Bitte wenden!

Maß- und Integrationstheorie

Katharina von der Lühe **SS 2016**
Nora Müller

Aufgabe 5 (Eigenschaften von $\|\cdot\|_\infty$). *(2+2 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für wesentlich beschränkte $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert man

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| := \inf\{c \geq 0 \ : \ |f| \leq c \ \mu\text{-f.ü.}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für wesentlich beschränktes f gilt $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-f.ü.
(b) Für wesentlich beschränkte f, g gilt $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Aufgabe 6 (Theorem 9.9). *(4 Punkte)*
Sei (M, d) ein metrischer Raum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon M\times\Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) $x \mapsto f(x,\omega)$ ist stetig für alle $\omega \in \Omega$,
(ii) $\omega \mapsto f(x,\omega)$ ist $\mathcal{A}$-messbar für alle $x \in M$.

Sei $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ eine Funktion mit $|f(x,\omega)| \leq g(\omega)$ für alle $x \in M, \omega \in \Omega$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} T\colon M &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int f(x,\omega)\mu(\mathrm{d}\omega) \end{aligned}$$

stetig ist.

Aufgabe 7 (zur Bemerkung 9.13 (ii)). *(2+2 Punkte)*
Geben Sie jeweils einen Maßraum sowie eine Klasse von Gegenbeispielen an und

*(a) zeigen Sie für alle $1 \leq p < \infty$, dass **f.ü.-Konvergenz** nicht **$\mathcal{L}^p$-Konvergenz** impliziert.*
*(b) zeigen Sie für alle $1 \leq p < \infty$, dass **$\mathcal{L}^p$-Konvergenz** nicht **f.ü.-Konvergenz** impliziert.*

Aufgabe 8. *(2+2 Punkte)*

(a) Beweisen Sie Theorem 10.8. aus der Vorlesung.
(b) Beweisen Sie Korollar 10.9. aus der Vorlesung.

Hinweis: *Beweisen Sie durch Widerspruch mit folgenden Annahmen:*
(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu < \int f \,\mathrm{d}\mu$ und (b) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $\mathcal{L}^p$