Maß- und Integrationstheorie

Katharina von der Lühe **SS 2016**
Nora Müller

Blatt 5

Abgabe: Donnerstag 22.9.2016, 12 Uhr

Aufgabe 1 (zur Bemerkung 11.2.). *(4 Punkte)*
Sei Ω eine Menge, sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, ..., n$ eine Familie von messbaren Räumen und sei $f_i \colon \Omega \to \Omega_i$, $i = 1, ..., n$, eine Familie von Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann

$$\sigma(f_i \mid i \in \{1, ..., n\}) := \sigma\Big(\bigcup_{i \in \{1,...,n\}} \{f_i^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}_i\} \Big)$$

die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist, so dass $f_i \colon \Omega \to \Omega_i$ $\mathcal{A}/\mathcal{A}_i$-messbar ist für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

Aufgabe 2 (zur Bemerkung 11.2., Definition 11.10.). *(2+2 Punkte)*

(a) Finden Sie zwei messbare Räume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, und eine Menge $Q \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ mit $Q_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ und $Q_{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$ für alle $\omega_2 \in \Omega_2$, aber $Q \notin \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.
*(b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass auf die Voraussetzung $E_{i,k} \nearrow \Omega_i$ in Satz 11.3. aus der Vorlesung **nicht** verzichtet werden kann.*

Hinweis: *(a) beispielsweise mit Hilfe von Aufgabe 4b) von Blatt 1*

Aufgabe 3 (Satz 11.15.). *(2+2 Punkte)*
Wir betrachten die Maßräume $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$ und $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$ wobei m das Lebesguemaß und μ das Zählmaß[1] seien. Außerdem sei $D := \{(x, y) \in [0,1] \times [0,1] \mid x = y\}$ die Diagonale.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0,1]$ die Funktion $f_x \colon y \mapsto \mathbb{1}_D(x, y)$ μ-integrierbar und für alle $y \in [0,1]$ die Funktion $f_y \colon x \mapsto \mathbb{1}_D(x, y)$ m-integrierbar ist. Berechnen Sie die Integrale

$$I(x) = \int_{[0,1]} f_x(y) \, \mathrm{d}\mu(y), \qquad J(y) = \int_{[0,1]} f_y(x) \, \mathrm{d}m(x)$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto I(x)$ m-integrierbar und die Funktion $y \mapsto J(y)$ μ-integrierbar ist und berechnen Sie

$$\mathcal{I} = \int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f_x(y) \, \mathrm{d}\mu(y) \Big) \, \mathrm{d}m(x), \qquad \mathcal{J} = \int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f_y(x) \, \mathrm{d}m(x) \Big) \, \mathrm{d}\mu(y)$$

Welche Voraussetzung des Satzes von Fubini (Satz 11.15.) ist nicht erfüllt?

[1] Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, dann definiert $\mu(A) := \begin{cases} \#A, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$ das Zählmaß.

Aufgabe 4 (Beweis von Bemerkung 12.1). *(2+2 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine nicht-negative $\mathcal{A}$-messbare Funktion.

(a) *Zeigen Sie, dass dann $\nu := g \cdot \mu$ definiert durch*

$$\nu(A) := \int_A g \, \mathrm{d}\mu$$

für beliebige $A \in \mathcal{A}$ wieder ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

(b) *Zeigen Sie, dass eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann quasi-ν-integrierbar ist, wenn $f \cdot g$ quasi-μ-integrierbar ist und dass in diesem Fall gilt:*

$$\int f \cdot g \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\nu$$

Aufgabe 5 (TEIL I - zum Korollar 11.13. und Theorem 12.3.). *(4 Punkte)*
Sei m das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)), d = 1, 2,$ und $\overline{B_r^d(x)} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |x - y| \leq r\}$ die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius $r \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$m(\overline{B_r^d(x_0)}) = \beta_d \cdot r^d$$

mit

$$\beta_d = \begin{cases} \frac{1}{n!}\pi^n, & \text{falls } d = 2n, \\ \frac{2^n \pi^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k-1)}, & \text{falls } d = 2n-1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: *Betrachten Sie die Abbildung $T(y) := r \cdot (x + y)$ und zeigen Sie $(\mathbb{1}_{\overline{B_r^d(x)}} \circ T)(y) = \mathbb{1}_{\overline{B_1^d(0)}}(y)$. Nach Anwendung von Theorem 12.3. betrachten Sie die Fälle $d = 1, d = 2$ separat.*

Aufgabe 6 (TEIL II). *(4 Punkte)*
Sei m das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)), d \geq 1,$ und $\overline{B_r^d(x)} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |x - y| \leq r\}$ die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius $r \geq 0$. Zeigen Sie nun für den Fall $d \geq 3$, dass

$$m(\overline{B_r^d(x_0)}) = \beta_d \cdot r^d$$

mit

$$\beta_d = \begin{cases} \frac{1}{n!}\pi^n, & \text{falls } d = 2n, \\ \frac{2^n \pi^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k-1)}, & \text{falls } d = 2n-1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: *Zeigen Sie dies mittels vollständiger Induktion und mit Hilfe der Rekursionsformel*

$$m(\overline{B_1^d(0)}) = m(\overline{B_1^{d-2}(0)}) \cdot \frac{2\pi}{d}.$$

Aufgabe 7 (vgl. Beweis von Theorem 12.3.). *(2+2 Punkte)*

(a) *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum, sei* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ *ein messbarer Raum und sei* $T\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ *eine* $\mathcal{A}/\tilde{\mathcal{A}}$*-messbare Abbildung. Zeigen Sie, dass eine* $\tilde{\mathcal{A}}$*-messbare Funktion* $f\colon \tilde{\Omega} \to \overline{\mathbb{R}}$ *genau dann (quasi-)*$T(\mu)$*-integrierbar ist, wenn* $f \circ T$ *(quasi-)*μ*-integrierbar ist und dass in diesem Fall*

$$\int f \circ T \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}T(\mu)$$

gilt. Hierbei bezeichne $T(\mu) := \mu \circ T^{-1}$ *das Bildmaß.*

(b) *Zeigen Sie, aus der ersten Aussage von Theorem 12.3.* $\varphi(|\det D\varphi| \cdot m|_U) = m|_V$ *der zweite Teil des Theorem 12.3. d.h.*

$$f\colon V \to \mathbb{R} \text{ } m\text{-integrierbar} \Leftrightarrow (f \circ \varphi)|\det D\varphi|\colon U \to \mathbb{R} \text{ } m\text{-integrierbar}$$

und die Transformationsformel

$$\int\limits_V f \, \mathrm{d}m = \int\limits_U (f \circ \varphi)|\det D\varphi| \, \mathrm{d}m$$

folgt.

Aufgabe 8 (Definition 14.1.). *(2+2 Punkte)*

(a) *Sei* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *durch*

$$f(x, y, z) := (x^2 + xy - y - z, 2x^2 + 3xy - 2y - 3z)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *gegeben. Zeigen Sie, dass* $f^{-1}(0, 0)$ *eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^3$ *ist.*

(b) *Seien* $n, m \in \mathbb{N}, U \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Sei* $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ *stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass der Graph* $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ *eine* n*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^{n+m}$ *ist.*