Maß- und Integrationstheorie

Katharina von der Lühe **SS 2016**
Nora Müller

Blatt 6

Aufgabe 1 (Beispiel 14.17. c)).
Seien $a, c \in (0, \infty)$ und sei

$$M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\}.$$

Berechnen Sie die Oberfläche $\mathrm{Vol}_2(M)$ *dieses Ellipsoiden.*

Aufgabe 2.
Seien $k, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^n$ und C eine $n \times n$-Matrix mit $C^T C = I$. Sei zudem $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $A \subset M$ eine Teilmenge von M mit k-Volumen und sei

$$\begin{aligned} F \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto F(x) := a + Cx \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass $F(A)$ eine Teilmenge der k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $F(M) \subset \mathbb{R}^n$ ist, die endliches k-Volumen hat und dass gilt:

$$\mathrm{Vol}_k(F(A)) = \mathrm{Vol}_k(A)$$

Aufgabe 3 (Definition 15.1.).
Berechnen Sie das Oberflächenvolumen der Untermannigfaltigkeit

$$M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 - z, z \in (0, 1) \right\}.$$

Geben Sie zu jedem Punkt $p = (x, y, z) \in M$ den Tangentialraum (Menge aller Tangentialvektoren an M in p) T_pM an.

Aufgabe 4 (Satz 14.19.).
Es sei S_+ die folgende Teilmenge der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$:

$$S_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1, x_i \geq 0 \ \forall\ i = 1, ..., n\}$$

Zeigen Sie für $p_1, ..., p_n \in \mathbb{R}_+$, dass gilt:

$$\int_{S_+} x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n} \, \mathrm{d}S(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p_1+1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \Gamma\left(\frac{p_n+1}{2}\right)}{2^{n-1} \cdot \Gamma\left(\frac{p_1+\ldots+p_n+n}{2}\right)},$$

wobei Γ die Gamma-Funktion bezeichne.

Katharina von der Lühe
Nora Müller SS 2016

zur Aufgabe 1

Betrachte $\mathcal{M} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1 \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = (1 - (\frac{z}{c})^2) a^2 \}$

Wie im Bsp. 14.17. besitzt $\mathcal{M}$ die Karte

$$\varphi : (-c,c) \times (0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit}$$

$$\varphi(t,\vartheta) = (f(t)\cos\vartheta,\ f(t)\sin\vartheta,\ t)$$

mit

$$f(t) = a \cdot \sqrt{1 - \frac{t^2}{c^2}} \qquad [NB: (1 - \frac{z^2}{c^2}) a^2 < 0,\ |z| > 0]$$

$$f'(t) = a \cdot \cancel{\frac{1}{2}} (1 - \frac{t^2}{c^2})^{-1/2} \cdot \frac{\cancel{2}t^2}{c^2}$$

Es gilt $\mathrm{Vol}_2(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} dS = \int_T \sqrt{g(t,\vartheta)}\ dm(t,\vartheta)$

wobei $g(t,\vartheta) = \det [(D\varphi(t,\vartheta))^T (D\varphi(t,\vartheta))]$

Bestimme nun

$$D\varphi(t,\vartheta) = \begin{pmatrix} f'(t)\cos\vartheta & -f(t)\sin\vartheta \\ f'(t)\sin\vartheta & f(t)\cos\vartheta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also

$$g(t,\vartheta) = \begin{vmatrix} 1 + f'(t)^2 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{vmatrix} = f(t)^2 (1 + f'(t)^2)$$

$$\mathrm{Vol}_2(M) = \int_T f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\; d(t,\vartheta)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi}\int_{-c}^{c} f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\; dt\, d\vartheta$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-c}^{c} f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\; dt$$

$$= 2\pi a \int_{-c}^{c} \sqrt{\left(1-\frac{t^2}{c^2}\right)\left(\frac{a^2t^2+c^4-t^2c^2}{c^4-t^2c^2}\right)}\; dt$$

$$= 2\pi a \int_{-c}^{c} \sqrt{\frac{t^2(a^2-c^2)}{c^4}+1}\; dt$$

$$\overset{s=t\cdot\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^4}}}{=} 2\pi a \int_{-\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c^2}}^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c^2}} \sqrt{s^2+1}\,\sqrt{\frac{c^4}{a^2-c^2}}\; ds$$

$$\overset{\text{Symm.}}{=} 4\pi a\cdot c^2\sqrt{\frac{1}{a^2-c^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c^2}} \sqrt{s^2+1}\; ds$$

$$= 4\pi a c^2\sqrt{\frac{1}{a^2-c^2}}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{s^2+1}\, s + \sinh^{-1}(s)\right)\right]_0^{\overset{=:\alpha}{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c^2}}}$$

$$= 2\pi a c^2 \frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\left(\sqrt{\alpha^2+1}\,\alpha + \sinh^{-1}(\alpha) - \underbrace{\sqrt{0^2+1}\cdot 0 - \sinh^{-1}(0)}_{=0}\right)$$

$$= \frac{2\pi a c^2\left(\frac{a}{c^2}\sqrt{a^2-c^2} + \operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^4}}\right)\right)}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

Katharina von der Lühe
Nora Müller

SS 2016

zur Aufgabe 2

Sei $x \in A \subset M \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. $F(x) = a + Cx \in F(M)$

$F(M)$ ist k-dim. Untermannigfaltigkeit, denn ist $\varphi: T \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion von M, so ist auch $F \circ \varphi$ Immersion von $F(M)$,

(C orthogonal)

Es ist

$$Vol_k(A) = \int_M \mathbb{1}_A(x)\, dS(x) = \int_T \mathbb{1}_A(\varphi(t)) \sqrt{g(t)}\, dt$$

$$= \int_T \mathbb{1}_{F(A)}\left((F \circ \varphi)(t)\right) \sqrt{\tilde{g}(t)}\, dt = \int_M \mathbb{1}_{F(A)}\, dS = Vol_k(F(A))$$

wobei $\tilde{g}(t)$ zu $F \circ \varphi$ gehört,

aber $\tilde{g} = g$, da

$$D(F \circ \varphi)(t) = DF(\varphi(t)) \circ D\varphi(t)$$

$DF = C$ konstant und damit

$$\left(D(F \circ \varphi)(t)\right)^T \left(D(F \circ \varphi)(t)\right) = \left(D\varphi(t)\right)^T \underbrace{C^T C}_{= I} \left(D\varphi(t)\right)$$

Katharina von der Lühe
Nora Müller

zur Aufgabe 3

Sei $f(z) = \sqrt{1-z}$, $z \in (0,1)$ $\overset{\text{Bsp } 14.17.}{\Longrightarrow}$ $Vol_2(M) = 2\pi \int_0^1 f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\, dt$

Es ist $f'(z) = -\frac{1}{2\sqrt{1-z}}$, also bestimme

$$\int_0^1 \sqrt{1-t}\sqrt{1+\frac{1}{4(1-t)}}\, dt = \int_0^1 \sqrt{(1-t)+\frac{1}{4}}\, dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{5}{4}-t}\, dt = \left[-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{4}-t\right)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{2}{3}\cdot\frac{5^{3/2}}{8}$$

$$= \frac{5^{3/2}-1}{12}$$

$$\Rightarrow Vol_2(M) = 2\pi\,\frac{5^{3/2}-1}{12} = \frac{5^{3/2}-1}{6}\,\pi$$

Sei $p \in M$ mit $p = (x,y,z)$. Betrachte die Karte

$$\phi: B_1(0,0)\setminus\{(0,0)\} \longrightarrow M$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 1-t_1^2-t_2^2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt (vgl. 15.2)

$$\frac{\partial\phi}{\partial t_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} =: v_1 , \quad \frac{\partial\phi}{\partial t_2}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} =: v_2$$

$$\Rightarrow T_p M = \mathcal{L}(v_1, v_2)$$

Maß- und Integrationstheorie

Katharina von der Lühe
Nora Müller

SS 2016

zur Aufgabe 4

Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \dots \times \mathbb{R}_+} x_1^{p_1} \cdot \dots \cdot x_n^{p_n} e^{-\|x\|^2} dx \overset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_0^\infty x_1^{p_1} e^{-x_1^2} dx_1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\int_0^\infty x_n^{p_n} e^{-x_n^2} dx_n \right)$$

$$\overset{z_i = x_i^2}{=} \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty z_1^{\frac{p_1 - 1}{2}} e^{-z_1} dz_1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty z_n^{\frac{p_n - 1}{2}} e^{-z_n} dz_n \right)$$

$$\overset{\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt}{=} \frac{1}{2^n} \Gamma\left(\frac{p_1+1}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n+1}{2}\right)$$

Mit Satz 14.19.

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \dots \times \mathbb{R}_+} x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} \cdot e^{-\|x\|^2} dx$$

$$= \int_0^\infty \int_{\substack{\|\xi\| = 1 \\ \xi_i \geq 0}} r^{p_1 + \dots + p_n} \cdot \xi_1^{p_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{p_n} \cdot e^{-r^2} \, dS(\xi) \, r^{n-1} dr$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^\infty r^{p_1 + \dots + p_n + n - 1} e^{-r^2} dr \right)}_{\text{mit } z = r^2} \cdot \int_{S_+} \xi_1^{p_1} \dots \xi_n^{p_n} \, dS(\xi)$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{p_1 + \dots + p_n + n}{2} \right)$$

$\Rightarrow$ Beh.