DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
1. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Aufgabe 1. Sei k ein Körper. Bestimmen Sie die globale Dimension der Algebra $A = k[X,Y]/(XY)$. Ist A erblich?

Aufgabe 2. Es sei k ein Körper. Welche der folgenden drei Unteralgebren $R_1, R_2, R_3 \subseteq \mathrm{Mat}_k(3 \times 3)$ sind erblich? Was sind ihre globalen Dimensionen?

$$R_1 = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad R_3 = \begin{pmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. (a) Beweisen Sie, dass der Ring

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

nicht erblich ist, obschon der Ring R^{op} erblich ist.

(b) Sei k ein Körper und sei R eine endlich-dimensionale k-Algebra. Beweisen Sie, dass R genau dann erblich ist, wenn R^{op} erblich ist.

Aufgabe 4. (a) Eine $\mathcal{H}$ eine erbliche, abelsche Kategorie. Sei $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ eine nicht leere, volle Unterkategorie, so dass für jede kurze exakte Folge

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

folgende Bedingung gilt: $M', M'' \in \mathcal{H}' \Rightarrow M \in \mathcal{H}'$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}'$ ebenfalls erblich ist.

(b) Es seien k ein Körper und Q ein Köcher. Eine Darstellung $((X_i)_{i \in Q_0}, (X_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ von Q heißt *nilpotent*, falls eine natürliche Zahl r existiert, so dass $X_p = 0$ für alle Wege p in Q der Länge $l(p) \geq r$.
Folgern Sie aus dem ersten Aufgabenteil, dass die Kategorie der nilpotenten Darstellungen erblich ist.

Abgabe bis Mittwoch, 28. Oktober 2015.