DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
10. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Aufgabe 1. Sei $k = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Für eine natürliche Zahl n sei Λ_n den Halbgruppenring $\mathbb{F}_q[\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F}_q)]$ und sei G_n der Gruppenring $\mathbf{F}_q[\mathrm{Gl}_n(\mathbf{F}_q)]$. Für eine weitere natürliche Zahl k bezeichne $e_k \in \Lambda_n$ die Diagonalmatrix mit $\mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)$ mit k Einsen und $n-k$ Nullen.

(a) Zeigen Sie, dass $e_{n-1}\Lambda_n e_{n-1} = \Lambda_{n-1}$ ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\Lambda_n e_{n-1}\Lambda_n$ der Spann aller nicht-invertierbaren Matrizen ist.
(c) Folgern Sie, dass es ein Recollement der folgenden Form gibt:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}\, G_n \arrow[r, shift left=1.5ex, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=1.5ex, leftarrow] & \mathrm{Mod}\, \Lambda_n \arrow[r, shift left=1.5ex, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=1.5ex, leftarrow] & \mathrm{Mod}\, \Lambda_{n-1} \end{tikzcd}$$

Aufgabe 2. Wir betrachten eine Kolokalisierungssequenz

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r, shift right, "i_*"'] & \mathcal{A} \arrow[l, shift right, "i^*"'] \arrow[r, shift right, "j^!"'] & \mathcal{A}'' \arrow[l, shift right, "j_!"'] \end{tikzcd}$$

abelscher Kategorien. Sei X ein Objekt in $\mathcal{A}$. Konstruieren Sie eine exakte Sequenz:

$$j_!j^!(X) \longrightarrow X \longrightarrow i_*i^*(X) \longrightarrow 0$$

Aufgabe 3. Sei A ein artinscher Ring mit Radikal R.

(a) Zeigen Sie, dass der A/R-Linksmodul $\mathrm{Hom}_{A/R}(R/R^2, A/R)$ endliche Länge hat, indem Sie den dualen Modul betrachten.

Auf dem 10. Blatt des letzten Semesters haben Sie gezeigt, dass $\mathrm{Hom}_{A/R}(R/R^2, A/R)$ als A/R-Bimodul zu $\mathrm{Ext}^1_A(A/R, A/R)$ isomorph ist. Wir betrachten nun die Kategorie $\mathcal{A} = \mathrm{mod}\, A$ der endlich-erzeugten A-Moduln.

(b) Zeigen Sie, dass der Vektorraum ${}_{\mathrm{End}(S)}\,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(T,S)$ für alle einfachen Objekte S,T in $\mathcal{A}$ endlich-dimensional ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Längenkategorie mit einfachen Objekten. Sei $\{S_i\}_{i\in I}$ die Menge der Isomorphieklassen der einfachen Objekte in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass die Menge der Serreunterkategorien von $\mathcal{A}$ in Bijektion zur Potenzmenge von I steht.

Abgabe bis Dienstag, 12. Januar 2015, 14:15.