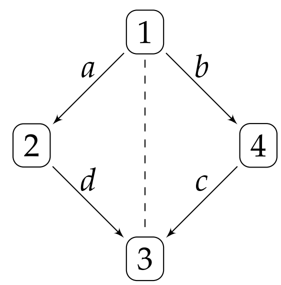
DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
11. ÜBUNGSBLATT

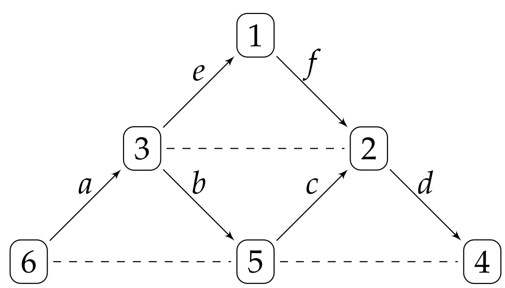
HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Aufgabe 1. Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass $\operatorname{mod} R$ für $R = k[x]/(x^2)$ keine Höchstgewichtskategorie ist.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper. Wir betrachten die Algebra $R = kQ/I$, wobei Q der abgebildete Köcher und $I = (ad - bc)$ ist. Zeigen Sie, dass $\operatorname{mod} R$ eine Höchstgewichtskategorie mit Standardmoduln $\Delta_1 = S_1$, $\Delta_2 = S_2$, $\Delta_3 = S_3$ und $\Delta_4 = P_4$ ist.



Aufgabe 3. Sei k ein Körper. Wir betrachten die *Auslander-Algebra* vom Typ A_3, also die Algebra $R = kQ/I$, wobei Q der abgebildete Köcher und $I = (ab, cd, bc - ef)$ ist.



(a) Wir setzen $\Delta_1 = S_1$ und $\Delta_2 = S_2$. Ferner sei Δ_3 der unzerlegbare Modul mit $\underline{\dim}(\Delta_3) = (101000)$. Schließlich seien $\Delta_4 = P_4$, $\Delta_5 = P_5$ und $\Delta_6 = P_6$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{mod} R$ durch $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$ die Struktur einer Höchstgewichtskategorie erhält.
(b) Für welche Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ ist $\operatorname{mod} R$ eine Höchstgewichtskategorie mit Standardmoduln $\Delta_1 = S_{\sigma(1)}, \ldots, \Delta_6 = S_{\sigma(6)}$?
(c) Für welche Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ ist $\operatorname{mod} R$ eine Höchstgewichtskategorie mit Standardmoduln $\Delta_1 = P_{\sigma(1)}, \ldots, \Delta_6 = P_{\sigma(6)}$?

Aufgabe 4. Sei Sei k ein Körper. Wir betrachten die Algebra $R = kQ/I$, wobei Q der abgebildete Köcher und $I = (ab)$ ist.

Abgabe bis Dienstag, 19. Januar 2015, 14:15.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{2} \arrow[dr, "b"] & \\
\boxed{1} \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, dash, dashed] & & \boxed{3}
\end{tikzcd}
$$

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ext}^2(-,-)$ verschieden von 0 ist. Somit ist $\operatorname{mod} R$ nicht erblich.

(b) Seien Δ_1, Δ_2, Δ_3 mögliche Standardmoduln. Wir betrachten die zugehörige Kette

$$0 = \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_3 = \operatorname{mod} R$$

aus den vollen Unterkategorien $\mathcal{A}_i = \operatorname{Serre}(\Delta_1, \ldots, \Delta_i)$. Zeigen Sie, dass das zugehörige Recollement

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_2 \arrow[r] & \mathcal{A}_3 \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] \arrow[r] & \operatorname{mod} \Gamma_3 \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2]
\end{tikzcd}
$$

mit $\Gamma_3 = \operatorname{End}_R(\Delta_3)$ nicht homologisch ist, falls $\Delta_3 = P_2$ ist. Insbesondere ist $\operatorname{mod} R$ mit der Folge $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ keine Höchstgewichtskategorie.