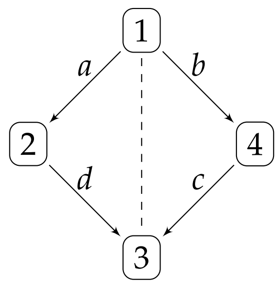
DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
12. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

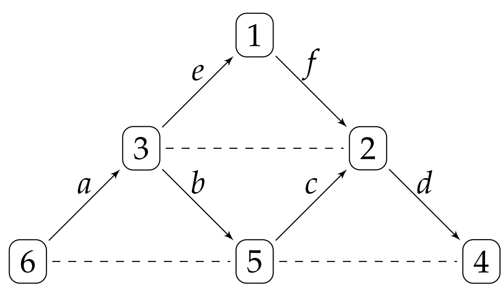
Aufgabe 1. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der Darstellungen eines linear orientierten Köchers vom Typ A_n über einem Körper k. Bestimmen Sie das Jacobsonradikal von $\mathcal{C}$.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper.

(a) Wir betrachten die Algebra $R = kQ/I$ aus dem letzten Aufgabenblatt, wobei Q der abgebildete Köcher und $I = (ad - bc)$ ist.



(b) Sei k ein Körper. Wir betrachten die Algebra $R = kQ/I$ aus dem letzten Aufgabenblatt, wobei Q der abgebildete Köcher und $I = (ab, cd, bc - ef)$ ist.



Bestimmen Sie eine endliche Kette $0 = \mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{C}_0 = \operatorname{proj} R$ voller, additiver Unterkategorien, so dass $\mathcal{C}_{i-1}/\mathcal{C}_i$ für alle i eine Erblichkeitsunterkategorie von $\mathcal{C}/\mathcal{C}_i$ ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ eine volle, additive Unterkategorie einer additiven Kategorie. Angenommen, die Inklusion $i\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ besitzt einen rechtsadjungierten Funktor $p\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$ mit $X \in \mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Morphismus $\tilde{f}\colon X \to p(Y)$ gibt, für den das folgende Diagramm kommutiert. Hierbei ist $P(Y) \to Y$ die Koeinheit.

Abgabe bis Dienstag, 26. Januar 2015, 14:15.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"'] & Y \\ & P(Y) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Aufgabe 4.

(a) Ist jeder artinsche Ring semiprimär? Ist jeder semiprimäre Ring artinsch?
(b) Sei $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt endlicher Länge in einer abelschen Kategorie. Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ semiprimär ist.