DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
13. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Aufgabe 1. Zeigen Sie: jeder linksadjungierte, additive Funktor zwischen zwei abelschen Kategorien ist rechtsexakt und jeder rechtsadjungierte, additive Funktor zwischen zwei abelschen Kategorien ist linksexakt.

Aufgabe 2. Es seien k ein Körper und $R = k[x]/(x^3)$. Wir setzen $X_0 = R$ (aufgefasst als R-Modul) und betrachten die Folge mit $X_{t+1} = \mathfrak{r}X_t$ für $t \geq 0$.

(a) Berechnen Sie die Moduln $X_1, X_2, \ldots$ explizit.
(b) Bestimmen Sie Standardmoduln für die Höchstgewichtskategorie $\operatorname{mod} \Lambda$ für den Ring $\Lambda = \operatorname{End}_R(\bigoplus_{t\geq 0} X_t)$.

Aufgabe 3. Sei R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{P}^{<\infty} = \{M \in \operatorname{mod} R\colon \operatorname{pd} M < \infty\}$$

abgeschlossen unter Erweiterungen, Kernen von Epimorphismen und Kokernen von Monomorphismen ist.

Aufgabe 4. Der Körper k erfülle die Bedingung $\operatorname{char} k \neq 2$. Wir betrachten die Schuralgebra $S_k(2,2)$. Ist V ein zweidimensionaler k-Vektorraum, so gilt nach Definition

$$S_k(2,2) = \operatorname{End}_{\Gamma^2\mathcal{P}_2}(V) = \Gamma^2 \operatorname{End}_k(V) = \operatorname{End}(V^{\otimes 2})^{\mathfrak{S}_2}.$$

Sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von V. Wir setzen $t_i = v_i \otimes v_i \in V^{\otimes 2}$ für $i = 1, 2$, sowie

$$s = \tfrac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1) \text{ und } a = \tfrac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1).$$

Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $f \in \operatorname{End}(V^{\otimes 2})$ genau dann invariant unter der Wirkung der Gruppe $\mathfrak{S}_2$ ist, wenn die Matrixdarstellung von f bezüglich der geordneten Basis (t_1, t_2, s, a) eine Blockdiagonalmatrix mit Blockgrößen 3 und 1 ist. Folglich gilt

$$S_k(2,2) \cong \operatorname{Mat}_{3\times 3}(k) \times \operatorname{Mat}_{1\times 1}(k).$$

Abgabe bis Dienstag, 2. Februar 2015, 14:15.