DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
14. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Aufgabe 1. Seien n und d positive ganze Zahlen. Der Körper k erfülle die Bedingung $\mathrm{char}(k) > d$. Zeigen Sie, dass die Schuralgebra $S_k(n,d)$ halbeinfach ist.

Aufgabe 2. Sei V ein 2-dimensionaler Vektorraum über einem Körper k mit $\mathrm{char}(k) > 3$.

(a) Berechnen Sie den Charakter χ der Permutationsdarstellung $V^{\otimes 3}$ der symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_3$. Bestimmen Sie ferner $\langle \chi, \chi_i \rangle$ für $1 \leq i \leq 3$. Hierbei seien χ_1, χ_2, χ_3 die Charaktere der drei irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{S}_3$.
(b) Beschreiben Sie die Schuralgebra $S_k(2,3)$ als Produkt von Matrixalgebren.

Aufgabe 3. Seien n, d positive ganze Zahlen. Ferner sei V ein k-Vektorraum der Dimension n mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Zeigen Sie, dass sich der $k\mathfrak{S}_d$-Modul $V^{\otimes d}$ als direkte Summe

$$V^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(n,d)} M^\lambda$$

zerlegt, wobei M^λ der k-Spann der $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_d}$ ist, für die $\lambda_l = |\{j \colon i_j = l\}|$ für alle l gilt.

Aufgabe 4. Sei V ein 3-dimensionaler k-Vektorraum mit Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$. Bestimmen Sie explizit Basen der Schurmoduln $S_\lambda V$ und der Weylmoduln $W_\lambda V$ für alle Partitionen λ vom Gewicht 4.

Abgabe bis Dienstag, 9. Februar 2015, 14:15.