# DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
# 2. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

**Aufgabe 1.** Sei $Q$ ein Köcher. Folgern Sie aus der Sequenz von Schofield, dass es für jede Darstellung $X$ von $Q$ über einem Körper $k$ (also für jeden Modul über der Wegealgebra $A = kQ$) eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{(i\to j)\in Q_1} Ae_j \otimes X_i \xrightarrow{f} \bigoplus_{i\in Q_0} Ae_i \otimes X_i \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

von Darstellungen existiert. Beschreiben Sie die Abbildungen $f$ und $g$ explizit.

**Aufgabe 2.** Konstruieren Sie einen Köcher $Q$ und ein zulässiges Ideal $I$ mit...

(a) ... $\operatorname{gl.dim} kQ/I = 3$.
(b) ... $\operatorname{gl.dim} kQ/I = 4$.
(c) ... $\operatorname{gl.dim} kQ/I = \infty$.

**Aufgabe 3.** Sei $k$ ein Körper. Ferner seien $i, j$ zwei Ecken eines Köchers $Q$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Pfeile $i \to j$ in $Q$ mit der Dimension des Vektorraums $\operatorname{Ext}^1_{kQ}(S_i, S_j)$ übereinstimmt.

**Aufgabe 4.** In dieser Aufgabe sei $k$ ein Körper und $A$ eine endlich dimensionale $k$-Algebra. Die Algebra $A$ heißt *separabel*, falls die Algebra $A \otimes_k K$ für jede Köpererweiterung $K/k$ halbeinfach ist. Insbesondere ist jede separable Algebra halbeinfach.

(a) Ist jede halbeinfache Algebra separabel?

Nach dem Satz von Wedderburn ist eine halbeinfache Algebra isomorph zu einem endlichen direkten Produkt $A \cong \prod_i \operatorname{Mat}(n_i \times n_i, D_i)$ von Matrixalgebren, wobei $n_i$ natürliche Zahlen und $D_i$ Divisionsalgebren über $k$ sind.

(b) Sei $K/k$ eine separable Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass $A \otimes_k K$ halbeinfach ist, falls $A$ halbeinfach ist.
(c) Sei $k$ ein perfekter Körper. Folgern Sie, dass jede halbeinfache $k$-Algebra separabel ist.

Abgabe bis Dienstag, 3. November 2015.