DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
3. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Längenkategorie. Zeigen Sie, dass die Grothendieckgruppe $K_0(\mathcal{A})$ isomorph ist zu der freien abelschen Gruppe, die von den Isomorphieklassen einfacher Objekte erzeugt wird.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{A} = \operatorname{rep}_k(Q)$ die Kategorie der Darstellungen eines Köchers vom Typ A_2 über einem Körper k.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $[M] \mapsto \underline{\dim}(M)$ einen Gruppenisomorphismus $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}^2$ induziert.
(b) Beschreiben Sie die Bilinearform $(-,-)\colon \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ explizit und berechnen Sie die zugehörige verallgemeinerte Cartanmatrix.
(c) Zeigen Sie, dass die Spiegelungen r_1, r_2 die Relationen $r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^3 = 1$ erfüllen. Folgern Sie, dass die Weylgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.
(d) Beschreiben Sie das zugehörige Wurzelsystem.

Aufgabe 3. Sei K/k eine Körpererweiterung vom Grad 2. Wir betrachten die Tensoralgebra $R = T_A(M) = \left(\begin{smallmatrix} k & K \\ 0 & K \end{smallmatrix}\right)$ mit der halbeinfachen Algebra $A = k \times K$ und dem Bimodul $M = K$. Sei $\mathcal{A} = \operatorname{mod} R$.

(a) Zeigen Sie, dass es einen Gruppenisomorphismus $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}^2$ gibt.
(b) Beschreiben Sie die Bilinearform $(-,-)\colon \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ explizit und berechnen Sie die zugehörige verallgemeinerte Cartanmatrix.
(c) Zeigen Sie, dass die Spiegelungen r_1, r_2 die Relationen $r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^4 = 1$ erfüllen.
(d) Beschreiben Sie das zugehörige Wurzelsystem.

Aufgabe 4. Sei C eine endliche, symmetriesierbare verallgemeinerte Cartanmatrix. Konstruieren Sie eine halbeinfache Algebra A über einem endlichen Körper k sowie einen A-Bimodul M, so dass die Cartanmatrix der Tensoralgebra $R = T_A(M)$ durch C gegeben ist.

Abgabe bis Dienstag, 10. November 2015, 14:15.