DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
4. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Aufgabe 1. In dieser Aufgabe konstruieren wir eine Algebra R, die nicht isomorph zu einer Tensoralgebra ist. Es sei F ein Körper und $B = F \oplus F$ ein zweidimensionaler Vektorraum, versehen mit einer F-Bimodulstruktur. Wir identifizieren F mit $F \oplus 0 \subseteq B$. Dann bildet die folgende Menge zusammen mit der Matrizenmultiplikation einen Ring:

$$R = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ F & F & 0 \\ B & F & F \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für den Ring R die folgenden Aussagen gelten:

$$\operatorname{rad} R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ B & F & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rad}^2 R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rad}^3 R = 0.$$

(b) Angenommen, $R \cong T_A(M)$ ist isomorph zu einer Tensoralgebra über einer halbeinfachen F-Algebra A und einem F-Bimodul M. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen gelten müssen:

$$A = R/\operatorname{rad} R = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \quad M = \operatorname{rad} R/\operatorname{rad}^2 R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ B/F & F & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Angenommen, R ist isomorph zu einer Tensoralgebra. Zeigen Sie, dass die folgende kurze exakte Sequenz von F-Bimoduln zerfällt:

$$0 \to F \to B \to B/F \to 0$$

Nun sei $F = k(\alpha)$ eine algebraische Köpererweiterung eines Körpers k mit $\operatorname{char} k = p > 0$ mit Erzeuger α. Wir nehmen ferner an, dass das Minimalpolynom von α die Form $X^p - a$ für ein $a \in k$ hat, zum Beispiel können wir $\mathbb{F}_p(t)/\mathbb{F}_p(t^p)$ wählen. In dem Fall ist F/k eine inseparable Körpererweiterung und k kein perfekter Körper.

(d) Zeigen Sie, dass die formale Ableitung

$$\delta\colon k(\alpha) \to k(\alpha), \quad \sum \lambda_i \alpha^i \mapsto \sum i\lambda_i \alpha^{i-1}$$

wohldefiniert ist und für alle $x, y \in F$ die Gleichungen $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y)$ und $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$ erfüllt. Eine derartige Abbildung nennt man *Derivation*.

(e) Wir betrachten nun den Bimodul $B = F \oplus F$ mit Linksmultiplikation $f(x,y) = (fx, fy)$ und Rechtsmultiplikation $(x,y)f = (xf + y\delta(f), yf)$ für alle $x, y, f \in F$. Zeigen Sie, dass die kurze exakte Sequenz aus (c) nicht zerfällt. Folgern Sie, dass R nicht isomorph zu einer Tensoralgebra ist.

Abgabe bis Dienstag, 17. November 2015, 14:15.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Algebra R aus Aufgabe 1 erblich ist. (Somit gilt der Satz von Wedderburn nicht über beliebigen Körpern.)

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe betrachten wir die Kategorie $\mathcal{A} = \mathrm{rep}_k(Q)$ der Darstellungen des Köchers $Q : 1 \to 2 \leftarrow 3$ vom Typ A_3. Bestimmen Sie alle exzeptionellen Folgen in der Kategorie $\mathcal{A}$.

Aufgabe 4. Sei $R = kQ/I$ mit dem folgenden Köcher Q und dem Ideal $I = (\beta\gamma, \gamma\alpha)$. Ferner sei $\mathcal{A} = \mathrm{mod}\, R$. Bestimmen Sie alle exzeptionellen Folgen in $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} & \boxed{1} \arrow[dl, "\alpha"'] & \\ \boxed{2} \arrow[rr, "\beta"'] & & \boxed{3} \arrow[ul, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$