DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
5. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Aufgabe 1. Wir betrachten die Kategorie $\mathcal{A} = \operatorname{mod} kQ$ mit dem folgenden Köcher Q:

$$\begin{tikzcd} \boxed{2} \arrow[dr] & & \\ & \boxed{3} \arrow[r] & \boxed{4} \\ \boxed{1} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Sei $X = S(3)$ und $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X)$. Konstruieren Sie für jeden unzerlegbaren kQ-Modul M Objekte $\overline{M}_{\mathcal{C}}, M_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ und $\overline{M}^{\mathcal{C}^\perp}, M^{\mathcal{C}^\perp} \in \mathcal{C}^\perp$ sowie eine exakte Sequenz:

$$0 \to \overline{M}^{\mathcal{C}^\perp} \to M_{\mathcal{C}} \to M \to M^{\mathcal{C}^\perp} \to \overline{M}_{\mathcal{C}} \to 0$$

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe betrachten wir die Kategorie $\mathcal{A} = \operatorname{mod} kQ$, wobei Q der Köcher $1 \to 2 \leftarrow 3$ vom Typ A_3 ist. In Aufgabe 4.3 haben Sie alle exzeptionellen Folgen X in der Kategorie $\mathcal{A}$ bestimmt. Konstruieren Sie für jede exzeptionelle Folge X ...

(i) einen zur Inklusion $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{A}$ linksadjungierten Funktor.
(ii) einen zur Inklusion $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{A}$ rechtsadjungierten Funktor.
(iii) einen Ringhomomorphismus $kQ \to B$, so dass die Restriktion eine Äquivalenz $\operatorname{mod} B \to \mathcal{C}(X)$ erzeugt.
(iv) eine exzeptionelle Folge Y in $\mathcal{A}$, so dass $\mathcal{C}(X) = Y^\perp$ gilt.
(v) eine exzeptionelle Folge Z in $\mathcal{A}$, so dass $\mathcal{C}(X) = {}^\perp Z$ gilt.

Aufgabe 3. Sei R eine endlich dimensionale, erbliche Algebra und $\mathcal{A} = \operatorname{mod} R$. Ferner sei $(P_1, \ldots, P_n)$ eine exzeptionelle Folge projektiver Objekte. Zeigen Sie, dass $(S_n, \ldots, S_1)$ eine exzeptionelle Folge ist, wenn wir $S_i = P_i / \operatorname{rad} P_i$ für alle i setzen.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

(a) Angenommen, $f_1\colon X_1 \to Y$ und $f_2\colon X_2 \to Y$ sind zwei Morphismen in $\mathcal{A}$ und P ist der Kern des Morphismus $(f_1, -f_2)\colon X_1 \oplus X_2 \to Y$. Wir erhalten eine Projektion $p_i\colon P \to X_i$ für $i \in \{1,2\}$. Zeigen Sie, dass $f_1 p_1 = f_2 p_2$ gilt.
Seien $q_i\colon Q \to X_i$ mit $i \in \{1,2\}$ Morphismen mit $f_1 q_1 = f_2 q_2$. Zeigen Sie, dass ein Morphismus $u\colon Q \to P$ existiert, so dass $p_i u = q_i$ für $i \in \{1,2\}$ gilt. Man nennt P das *Pullback* von X_1 und X_2 über Y.
Zeigen Sie ferner folgende zwei Aussagen: es gilt $\ker(f_1) \cong \ker(p_2)$ und ferner ist p_2 ein Epimorphismus ist, falls f_1 ein Epimorphismus ist.

Abgabe bis Dienstag, 24. November 2015, 14:15.

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[rrd, bend left, "q_2"] \arrow[rd, dashed, "u"] \arrow[rdd, bend right, "q_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\
& X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y
\end{tikzcd}
$$

(b) Sei $f\colon X' \to X$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$ und sei

$$
0 \longrightarrow Y \xrightarrow{h} M \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0
$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Wir betrachten das Pullback M' von M und X' über X. Nach Aufgabenteil a erhalten wir eine kurze exakte Sequenz $0 \to Y \to M' \to X' \to 0$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed] & M' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & M \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Überzeugen Sie sich, dass das folgende Aussagen gelten:

(i) Die Konstruktion induziert eine wohldefinierte Abbildung

$$
\mathrm{Ext}^1(f, Y)\colon\ \mathrm{Ext}^1(X, Y) \to \mathrm{Ext}^1(X', Y).
$$

(ii) Ist $f'\colon X'' \to X'$ ein weiterer Morphismus, so gilt $\mathrm{Ext}^1(f', Y) \circ \mathrm{Ext}^1(f, Y) = \mathrm{Ext}^1(f' \circ f, Y)$. Insbesondere wird $\mathrm{Ext}^1(X, Y)$ ein $\mathrm{End}(X)$-Modul (und analog ein $\mathrm{End}(Y)^{op}$-Modul).