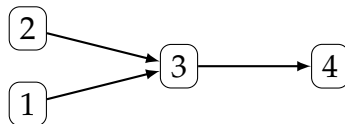


DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III 5. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Aufgabe 1. Wir betrachten die Kategorie $\mathcal{A} = \text{mod } kQ$ mit dem folgenden Köcher Q :



Sei $X = S(3)$ und $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X)$. Konstruieren Sie für jeden unzerlegbaren kQ -Modul M Objekte $\overline{M}_{\mathcal{C}}, M_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ und $\overline{M}^{\mathcal{C}^\perp}, M^{\mathcal{C}^\perp} \in \mathcal{C}^\perp$ sowie eine exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow \overline{M}^{\mathcal{C}^\perp} \rightarrow M_{\mathcal{C}} \rightarrow M \rightarrow M^{\mathcal{C}^\perp} \rightarrow \overline{M}_{\mathcal{C}} \rightarrow 0$$

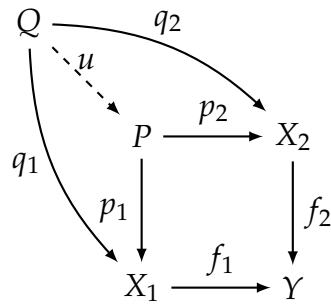
Aufgabe 2. In dieser Aufgabe betrachten wir die Kategorie $\mathcal{A} = \text{mod } kQ$, wobei Q der Köcher $1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$ vom Typ A_3 ist. In Aufgabe 4.3 haben Sie alle exceptionellen Folgen X in der Kategorie \mathcal{A} bestimmt. Konstruieren Sie für jede exceptionelle Folge X ...

- (i) einen zur Inklusion $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{A}$ linksadjungierten Funktor.
- (ii) einen zur Inklusion $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{A}$ rechtsadjungierten Funktor.
- (iii) einen Ringhomomorphismus $kQ \rightarrow B$, so dass die Restriktion eine Äquivalenz $\text{mod } B \rightarrow \mathcal{C}(X)$ erzeugt.
- (iv) eine exceptionelle Folge Y in \mathcal{A} , so dass $\mathcal{C}(X) = Y^\perp$ gilt.
- (v) eine exceptionelle Folge Z in \mathcal{A} , so dass $\mathcal{C}(X) = {}^\perp Z$ gilt.

Aufgabe 3. Sei R eine endlich dimensionale, erbliche Algebra und $\mathcal{A} = \text{mod } R$. Ferner sei (P_1, \dots, P_n) eine exceptionelle Folge projektiver Objekte. Zeigen Sie, dass (S_n, \dots, S_1) eine exceptionelle Folge ist, wenn wir $S_i = P_i / \text{rad } P_i$ für alle i setzen.

Aufgabe 4. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie.

- (a) Angenommen, $f_1: X_1 \rightarrow Y$ und $f_2: X_2 \rightarrow Y$ sind zwei Morphismen in \mathcal{A} und P ist der Kern des Morphismus $(f_1, -f_2): X_1 \oplus X_2 \rightarrow Y$. Wir erhalten eine Projektion $p_i: P \rightarrow X_i$ für $i \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie, dass $f_1 p_1 = f_2 p_2$ gilt. Seien $q_i: Q \rightarrow X_i$ mit $i \in \{1, 2\}$ Morphismen mit $f_1 q_1 = f_2 q_2$. Zeigen Sie, dass ein Morphismus $u: Q \rightarrow P$ existiert, so dass $p_i u = q_i$ für $i \in \{1, 2\}$ gilt. Man nennt P das *Pullback* von X_1 und X_2 über Y . Zeigen Sie ferner folgende zwei Aussagen: es gilt $\ker(f_1) \cong \ker(p_2)$ und ferner ist p_2 ein Epimorphismus ist, falls f_1 ein Epimorphismus ist.



(b) Sei $f: X' \rightarrow X$ ein Morphismus in \mathcal{A} und sei

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{h} M \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in \mathcal{A} . Wir betrachten das Pullback M' von M und X' über X . Nach Aufgabenteil a erhalten wir eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow Y \rightarrow M' \rightarrow X' \rightarrow 0$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{dotted} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Überzeugen Sie sich, dass das folgende Aussagen gelten:

(i) Die Konstruktion induziert eine wohldefinierte Abbildung

$$\text{Ext}^1(f, Y): \text{Ext}^1(X, Y) \rightarrow \text{Ext}^1(X', Y).$$

(ii) Ist $f': X'' \rightarrow X'$ ein weiterer Morphismus, so gilt $\text{Ext}^1(f', Y) \circ \text{Ext}^1(f, Y) = \text{Ext}^1(f' \circ f, Y)$. Insbesondere wird $\text{Ext}^1(X, Y)$ ein $\text{End}(X)$ -Modul (und analog ein $\text{End}(Y)^{op}$ -Modul).