DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
6. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad 2. Weiterhin sei $\mathcal{A} = \operatorname{mod} R$ die Kategorie der endlich erzeugten Moduln über der K-Algebra

$$R = \begin{pmatrix} K & K & L \\ 0 & K & L \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie die unzerlegbaren projektiven Objekte sowie die einfachen Objekte in $\mathcal{A}$. Folgern Sie, dass R erblich ist.

(b) Bestimmen Sie $\dim_K \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(S,T)$ sowie $\dim_K \operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}(S,T)$ für alle einfachen Objekte S, T. Wie lautet die Cartanmatrix C?

Aufgabe 2. Wie in oben gezeigt, indiziert die Menge $I = \{1,2,3\}$ die Isomorphieklassen der einfachen Objekte. Im Folgenden identifizieren wir daher $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}^3$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Zu den Spiegelungen r_1, r_2, r_3 gehören bzgl. der Basis $\{[S_1],[S_2],[S_3]\}$ die Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Das Wurzelsystem ist die Vereinigung $\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-$, wobei die positiven Wurzeln durch die folgende Menge Φ_+ gegeben sind. Visualisieren Sie das Wurzelsystem durch die Ecken und die Kantenmittelpunkte eines regelmäßigen Oktaeders.

$$\Phi_+ = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe betrachten wir die Kategorie $\mathcal{A} = \operatorname{rep}_k(Q)$ der Darstellungen des Köchers $Q : 1 \to 2 \leftarrow 3$ vom Typ A_3. Bestimmen Sie die Mutationen $(L_X(Y), X)$ und $(Y, R_Y(X))$ für die exzeptionellen Folgen

$$(X,Y) = (P_1, I_1) \qquad \text{und} \qquad (X,Y) = (I_2, I_1).$$

Aufgabe 4. Sei C der Kettenkomplex

$$C\colon \ \dots \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \dots$$

von abelschen Gruppen und sei D der Nullkomplex. Zeigen Sie, dass C und D quasiisomorph, aber nicht homotopieäquivalent sind

Abgabe bis Dienstag, 1. Dezember 2015, 14:15.