

## DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III 7. ÜBUNGSBLATT

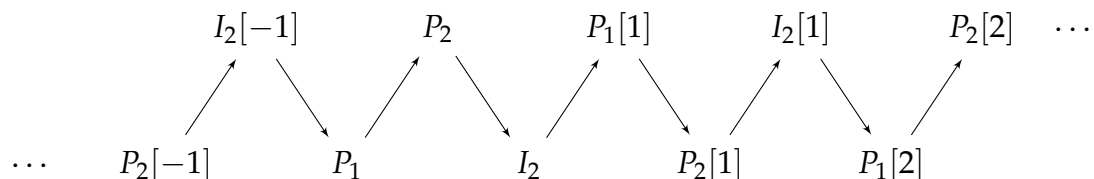
HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

**Aufgabe 1.** Sei  $R$  eine endlich-dimensionale Algebra und  $\mathcal{A} = \text{mod } R$ . Zeigen Sie, dass eine projektive Auflösung  $\dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  von  $M \in \mathcal{A}$  einen Quasiisomorphismus der folgenden Form induziert:

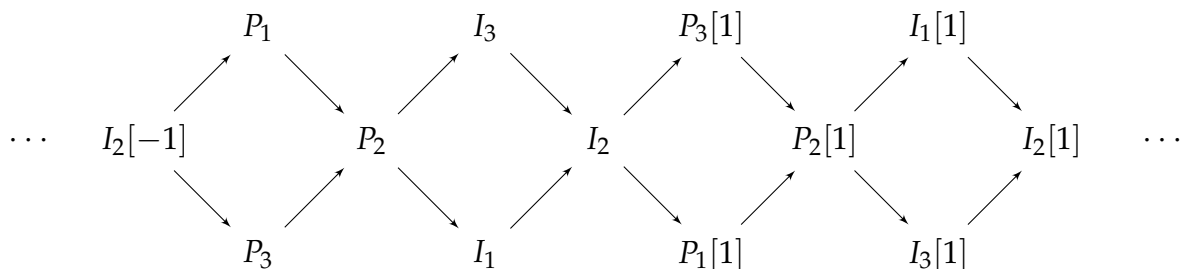
$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

**Aufgabe 2.** Sei  $k$  ein Körper und sei  $Q$  der Köcher  $1 \leftarrow 2$  vom Typ  $A_2$ . Für  $X \in \text{mod } kQ$  und  $i \in \mathbb{Z}$  sei  $X[i] \in \mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$  der Kettenkomplex mit  $X[i]_i = X$ ,  $X[i]_j = 0$  für  $j \neq i$  und  $d_j = 0$  für alle  $j$ . Für  $X[0]$  schreiben wir auch  $X$ .

- (a) Konstruieren Sie einen Morphismus  $I_2 \rightarrow P_1[1]$  in  $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$  verschieden von 0.
- (b) Konstruieren Sie von 0 verschiedene Morphismen in  $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$  zwischen den folgenden Objekten:



**Aufgabe 3.** Sei  $Q$  der Köcher  $1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$  vom Typ  $A_3$ . Konstruieren Sie von 0 verschiedene Morphismen in  $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$  zwischen den folgenden Objekten:



**Aufgabe 4.** Es sei  $R$  eine endlich-dimensionale, erbliche Algebra. Gegeben sei eine exzeptionelle Folge  $(X, Y)$  in der Kategorie  $\mathcal{A} = \text{mod } R$  der Länge 2.

---

Abgabe bis Dienstag, 8. Dezember 2015, 14:15.

- (a) Angenommen, es gibt einen von 0 verschiedenen Monomorphismus  $\phi: X \rightarrow Y$ . Zeigen Sie, dass  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) = 0$  gilt, indem Sie den Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$  auf die kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow \text{coker}(\phi) \rightarrow 0$  anwenden. Folgern Sie, dass die Gleichung  $s_{[X]}([Y]) = [L_X(Y)]$  gilt.
- (b) Angenommen, es gibt einen von 0 verschiedenen Epimorphismus  $\psi: X \rightarrow Y$ . Zeigen Sie durch ein ähnliches Argument, dass  $s_{[X]}([Y]) = -[L_X(Y)]$  gilt.