DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
7. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Aufgabe 1. Sei R eine endlich-dimensionale Algebra und $\mathcal{A} = \operatorname{mod} R$. Zeigen Sie, dass eine projektive Auflösung $\ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ von $M \in \mathcal{A}$ einen Quasiisomorphismus der folgenden Form induziert:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 2. Sei k ein Körper und sei Q der Köcher $1 \leftarrow 2$ vom Typ A_2. Für $X \in \operatorname{mod} kQ$ und $i \in \mathbb{Z}$ sei $X[i] \in \mathcal{D}^b(\operatorname{mod} kQ)$ der Kettenkomplex mit $X[i]_i = X$, $X[i]_j = 0$ für $j \neq i$ und $d_j = 0$ für alle j. Für $X[0]$ schreiben wir auch X.

(a) Konstruieren Sie einen Morphismus $I_2 \to P_1[1]$ in $\mathcal{D}^b(\operatorname{mod} kQ)$ verschieden von 0.
(b) Konstruieren Sie von 0 verschiedene Morphismen in $\mathcal{D}^b(\operatorname{mod} kQ)$ zwischen den folgenden Objekten:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & I_2[-1] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[dr] & & P_1[1] \arrow[dr] & & I_2[1] \arrow[dr] & & P_2[2] & \cdots \\
\cdots & P_2[-1] \arrow[ur] & & P_1 \arrow[ur] & & I_2 \arrow[ur] & & P_2[1] \arrow[ur] & & P_1[2] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 3. Sei Q der Köcher $1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$ vom Typ A_3. Konstruieren Sie von 0 verschiedene Morphismen in $\mathcal{D}^b(\operatorname{mod} kQ)$ zwischen den folgenden Objekten:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & P_1 \arrow[dr] & & I_3 \arrow[dr] & & P_3[1] \arrow[dr] & & I_1[1] \arrow[dr] & & \\
\cdots & I_2[-1] \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_2[1] \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_2[1] & \cdots \\
 & & P_3 \arrow[ur] & & I_1 \arrow[ur] & & P_1[1] \arrow[ur] & & I_3[1] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 4. Es sei R eine endlich-dimensionale, erbliche Algebra. Gegeben sei eine exzeptionelle Folge (X, Y) in der Kategorie $\mathcal{A} = \operatorname{mod} R$ der Länge 2.

Abgabe bis Dienstag, 8. Dezember 2015, 14:15.

(a) Angenommen, es gibt einen von 0 verschiedenen Monomorphismus $\phi\colon X \to Y$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$ gilt, indem Sie den Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ auf die kurze exakte Sequenz $0 \to X \to Y \to \mathrm{coker}(\phi) \to 0$ anwenden. Folgern Sie, dass die Gleichung $s_{[X]}([Y]) = [L_X(Y)]$ gilt.

(b) Angenommen, es gibt einen von 0 verschiedenen Epimorphismus $\psi\colon X \to Y$. Zeigen Sie durch ein ähnliches Argument, dass $s_{[X]}([Y]) = -[L_X(Y)]$ gilt.