DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
8. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und sei Q ein Köcher vom Typ A_n. Zur Kategorie mod kQ assozieren wir die $n \times n$ Cartanmatrix $C = (c_{ij})$ mit Einträgen

$$c_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{falls } |i-j| = 0; \\ -1 & \text{falls } |i-j| = 1; \\ 0 & \text{falls } |i-j| > 1. \end{cases}$$

In dieser Aufgabe studieren wir die zugehörige Weylgruppe W. Sie ist eine Coxetergruppe mit Erzeugendensystem $S = \{s_i \colon 1 \leq i \leq n\}$ und Relationen $s_i^2 = (s_i s_{i+1})^3 = 1$ für alle i und $(s_i s_j)^2 = 1$ für alle i, j mit $|i-j| > 1$.

Aufgabe 1. Sei $(-,-) \colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ die zu C gehörige symmetrische Bilinearform. Nach der Vorlesung ist $\rho \colon W \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z})$ mit $\rho(s_i)(x) = x - (x, e_i)e_i$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Sei $V = \{x \in \mathbb{Z}^{n+1} \colon \sum_i x_i = 0\}$ und sei $(-,-)_S$ die Standardbilinearform auf $\mathbb{Z}^{n+1}$.

(a) Zeigen Sie, dass die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\sigma \colon \mathbb{Z}^n \to V$ mit $\sigma(e_i) = e_i - e_{i+1}$ bijektiv ist und dass $(x,y) = (\sigma(x), \sigma(y))_S$ für alle x, y gilt.
(b) Zeigen Sie, dass $\widetilde{\rho} \colon W \to \mathrm{Gl}(V)$ mit $\widetilde{\rho}(w) = \sigma\rho(w)\sigma^{-1}$ ein injektiver Gruppenhomorphismus ist, der s_i auf den Tausch der Einträge zwischen den Stellen i und $i+1$ schickt. Folgern Sie, dass W isomorph zur symmetrischen Gruppe S_{n+1} ist.
(c) Zeigen Sie, dass $\sigma(\Phi) = \{x \in V \colon |x| = 2\}$ gilt. Welche Darstellung eines Köchers vom Typ A_n gehört zu $e_i - e_{j+1} \in V$?

Aufgabe 2. Im Folgenden identifizieren wir W mit S_{n+1} vermöge der Bijektion aus Aufgabe 1. Elemente der symmetrischen Gruppe S_{n+1} schreiben wir auch in Zyklendarstellung. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Menge der Spiegelungen ist $T = \{(ij) \in S_{n+1} \colon i \neq j\}$. Für welche Köcherdarstellung X entspricht $s_{[X]} \in W$ einer Transposition (ij)?
(b) Sei $u \in S_{n+1}$. Dann gilt $l(u) = n + 1 - k$, wobei k die Anzahl der Zykeln in der Zyklendarstellung von u (inklusive der Zykel der Länge 1) bezeichnet.
(c) Das Coxeterelement $c = s_1 s_2 \cdots s_n$ ist gleich $(12 \ldots n+1)$.
(d) Seien $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n+1$. Dann gilt $(i_1 i_2 \ldots i_r) \leq c$. Seien ferner $j_1, j_2, \ldots, j_r$ ganze Zahlen mit $\{j_k \colon 1 \leq k \leq r\} = \{i_k \colon 1 \leq k \leq r\}$ und $(j_1 j_2 \ldots j_r) \neq (i_1 i_2 \ldots i_r)$. Dann gilt $(j_1 j_2 \ldots j_r) \not\leq c$.

Wir arrangieren die Zahlen $1, 2 \ldots, n+1$ entgegen dem Uhrzeigersinn auf einem Kreis. Sei $u \in S_{n+1}$. Wir nehmen an, dass die Einträge $i_1, i_2, \ldots, i_r$ eines jeden Zykels $(i_1 i_2 \ldots i_r)$ von u gegen den Uhrzeigersinn gesehen in dieser Reihenfolge auf dem Kreis liegen. Wir nehmen ferner, dass für je zwei Zykel $(i_1 i_2 \ldots i_r)$ und $(j_1 j_2 \ldots j_s)$ von u die konvexen

Abgabe bis Dienstag, 15. Dezember 2015, 14:15.

Hüllen der Mengen $\{i_k \colon 1 \leq k \leq r\}$ und $\{j_k \colon 1 \leq k \leq s\}$ keinen Punkt gemeinsam haben. Die Abbildung 1 zeigt ein Beispiel. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(e) Die konvexen Hüllen der Zykel von $u^{-1}c$ sind ebenfalls paarweise disjunkt. Sie ergeben sich aus den Komplementen der konvexen Hüllen der Zykel von u.

(f) Es gilt $u \in \mathrm{NC}(W, c)$. Ferner ist jedes Element in $\mathrm{NC}(W, c)$ von dieser Form.

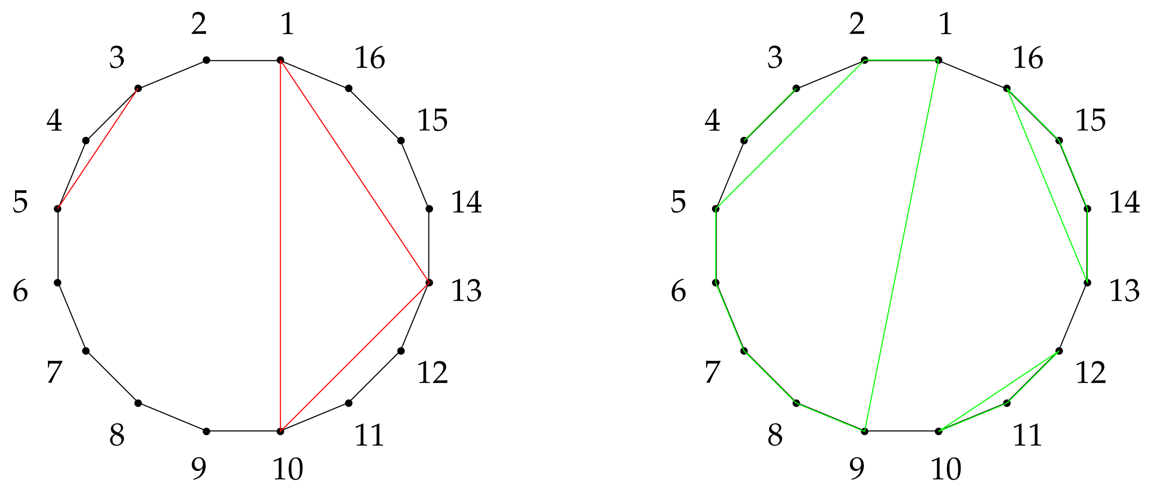


ABBILDUNG 1. $u = (1, 10, 13)(3, 5)$ und $u^{-1}c = (1, 2, 5, 6, 7, 8, 9)(3, 4)(10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$

Aufgabe 3. Die Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der *Catalanzahlen* sei definiert durch den Startwert $C_0 = 1$ und die Rekursionsformel

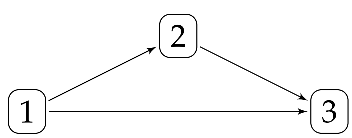
$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

für $n \geq 0$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Anzahl der nicht kreuzenden Partitionen in W ist gleich C_{n+1}.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Aufgabe 4. Es sei Q der abgebildete Köcher. Wir betrachten einen unzerlegbaren Modul $X \in \operatorname{mod} kQ$ mit $\underline{\dim} X = (1, 2, 1)$.



(a) Zeigen Sie, dass $[X] \in K_0(\operatorname{mod} kQ)$ eine reelle Wurzel ist.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Ext}^1_{kQ}(X, X)$, indem Sie eine projektive Auflösung von X berechnen. Folgern Sie, dass X nicht exzeptionell ist, obwohl $[X]$ eine reelle Wurzel ist.