DARSTELLUNGSTHEORIE VON ALGEBREN III
LÖSUNGEN DER AUFGABEN 4.1 UND 4.2

PHILIPP LAMPE

In diesen Aufgaben konstruieren wir eine erbliche Algebra R, die nicht isomorph zu einer Tensoralgebra ist. Es sei F ein Körper und $B = F \oplus F$ ein zweidimensionaler Vektorraum, den wir mit einer F-Bimodulstruktur versehen. Wir identifizieren F mit $F \oplus 0 \subseteq B$. Dann bildet die folgende Menge zusammen mit der Matrizenmultiplikation einen Ring:

$$R = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ F & F & 0 \\ B & F & F \end{pmatrix}.$$

Aufgabe. Zeigen Sie, dass für den Ring R die folgenden Aussagen gelten:

$$\operatorname{rad} R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ B & F & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rad}^2 R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rad}^3 R = 0.$$

Lösung. Wir verwenden die Beschreibung

$$\operatorname{rad} R = \{x \in R \colon 1 - xy \in R^\times \textit{ für alle } y \in R\}$$

des Jacobsonschen Radikals aus dem ersten Semester. Um das Radikal zu beschreiben, bestimmen wir zunächst die Einheiten in R. Wir behaupten:

$$R^\times = \begin{pmatrix} F^\times & 0 & 0 \\ F & F^\times & 0 \\ B & F & F^\times \end{pmatrix}.$$

Für einen Beweis genügt es, die Inklusion „$\supseteq$“ zu zeigen, da die Inklusion „$\subseteq$“ trivial ist. Seien also $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F^\times$, $\beta_1, \beta_2 \in F$ und $b \in B$ die Einträge einer beliebigen Matrix x aus der Menge auf der rechten Seite der Gleichung. Dann existiert ein inverses Element

$$x^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 & 0 \\ -\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\beta_1 & \alpha_2^{-1} & 0 \\ \alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1}\beta_1\beta_2 - \alpha_3^{-1} b \alpha_1^{-1} & -\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1}\beta_2 & \alpha_3^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 \\ b & \beta_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir die Hilfsbehauptung bewiesen. Um die eigentliche Behauptung über das Radikal zu zeigen, müssen wir ebenfalls zwei Inklusionen nachweisen. Ist

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ b & \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ B & F & 0 \end{pmatrix}$$

und $y \in R$, so sind alle Diagonaleinträge in $1 - xy$ gleich 1. In dem Fall ist $1 - xy \in R^\times$ und die Inklusion „$\supseteq$“ bewiesen. Sei umgekehrt $x \in \operatorname{rad} R$. Angenommen, ein Diagonaleintrag $x_{ii} = \alpha_i$ ist von 0 verschieden. Dann gilt für eine beliebige Diagonalmatrix $y \in R$ mit Diagonaleintrag $y_{ii} = \alpha_i^{-1}$ die Relation $1 - xy \notin R^\times$, was ein Widerspruch ist. Also sind alle Diagonaleinträge von x gleich 0 und die Inklusion „$\subseteq$“ ist bewiesen.

Die Gleichungen für $\operatorname{rad}^2 R$ und $\operatorname{rad}^3 R$ folgen aus der Gleichung für $\operatorname{rad} R$. $\square$

Aufgabe. Angenommen, $R \cong T_A(M)$ ist isomorph zu einer Tensoralgebra eines F-Bimoduls M über einer halbeinfachen F-Algebra A. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen gelten müssen:

$$A \cong R/\operatorname{rad} R = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \quad M \cong \operatorname{rad} R/\operatorname{rad}^2 R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ B/F & F & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir gehen schrittweise vor. Zunächst zeigen wir, dass

$$T_A(M)^\times = A^\times \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} M^{\otimes i} \subseteq T_A(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^{\otimes i}$$

gilt. Sei $x \in T_A(M)^\times$. Das Element lässt sich schreiben als $x = (a, m)$ mit $a \in A$ und $m \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} M^{\otimes i}$. Nach Voraussetzung existiert ein $y = (b, n) \in T_A(M)$ mit $xy = 1$. Es folgt $ab = 1$. Somit ist $a \in A^\times$ und die Inklusion „$\subseteq$“ gezeigt. Sei umgekehrt $x = (a, m) \in A^\times \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} M^{\otimes i}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $a = 1$ an. Es gilt

$$(1 + m)(1 - m + m^2 - m^3 + m^4 - \ldots) = 1.$$

Da $T_A(M)$ endlich dimensional ist, erhalten wir ein zu x inverses Element in $T_A(M)$. Damit ist $x \in T_A(M)^\times$ und die Inklusion „$\subseteq$“ ist bewiesen.

Im zweiten Schritt beweisen wir die Behauptung

$$\operatorname{rad} T_A(M) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} M^{\otimes i}.$$

Für einen Beweis sei $x = (a, m) \in \operatorname{rad} T_A(M)$. Da A halbeinfach ist, gilt $\operatorname{rad} A = 0$. Angenommen $a \neq 0$. Nach der Bewschreibung des Radikals gibt es ein $b \in A$ so, dass $1 - ab \notin A^\times$. Für $y = (b, 0)$ folgt $1 - xy \notin T_A(M)^\times$, was ein Widerspruch ist. Also ist $a = 0$ und die Inklusion „$\subseteq$“ bewiesen. Ist umgekehrt $x \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} M^{\otimes i}$, so gilt $xy \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} M^{\otimes i}$ für alle $y \in T_A(M)$. Somit ist $1 - xy \in T_A(M)^\times$ und die Inklusion „$\supseteq$“ bewiesen.

Es folgt $\operatorname{rad}^n T_A(M) = \bigoplus_{i=n}^{\infty} M^{\otimes i}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbseondere erhalten wir Isomorphismen $A = T_A(M)/\operatorname{rad} T_A(M) \cong R/\operatorname{rad} R$ und $M = \operatorname{rad} T_A(M)/\operatorname{rad}^2 T_A(M) \cong \operatorname{rad} R/\operatorname{rad}^2 R$. Ergo: *Wenn die Algebra R isomorph zu einer Tensoralgebra ist, dann ist sie isomorph zu ihrer Tensoralgebra.* Die Beschreibung von $R/\operatorname{rad} R$ und $\operatorname{rad} R/\operatorname{rad}^2 R$ folgt unmittelbar aus der ersten Aufgabe. Insbesondere ist $M^{\otimes i} = 0$ für $i \geq 3$. $\square$

Aufgabe. Angenommen, R ist isomorph zu einer Tensoralgebra. Zeigen Sie, dass die folgende kurze exakte Sequenz von F-Bimoduln zerfällt:

$$0 \to F \to B \to B/F \to 0$$

Lösung. Der Algebrenisomorphismus $R \cong T_A(M) = A \oplus M \oplus M^{\otimes 2}$ induziert einen Isomorphismus $A \oplus M \oplus M^{\otimes 2} \cong R$ von R-Bimoduln. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ B/F & F & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ B & F & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten einen F-Bimodulisomorphismus $F \oplus B/F \cong B$, d.h. die Sequenz zerfällt. $\square$

Nun sei $F = k(\alpha)$ eine algebraische Köpererweiterung eines Körpers k mit $\operatorname{char} k = p > 0$ mit Erzeuger α. Wir nehmen ferner an, dass das Minimalpolynom von α von der Form $X^p - 1$ ist, zum Beispiel können wir $\mathbb{F}_p(t)/\mathbb{F}_p(t^p)$ wählen. In dem Fall ist F/k eine inseparable Körpererweiterung und k kein perfekter Körper.

Aufgabe. Zeigen Sie, dass die formale Ableitung

$$\delta\colon k(\alpha) \to k(\alpha), \quad \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \alpha^i \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} i\lambda_i \alpha^{i-1}$$

wohldefiniert ist und für alle $x, y \in F$ die Gleichungen $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y)$ und $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$ erfüllt. Eine derartige Abbildung nennt man *Derivation*.

Lösung. Jedes Element $x \in k(\alpha)$ lässt sich auf eindeutige Weise als $x = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \alpha^i$ mit $\lambda_i \in k$ schreiben. Somit ist δ eine wohldefinierte und k-lineare Abbildung. Wir bemerken, dass die Gleichung $\delta(\alpha^i) = i\alpha^{i-1}$ wegen der Relation $\alpha^p = 1$ und $\operatorname{char} k = p$ auch für $i \geq p$ gilt. Ist $y = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \alpha^i$ mit $\mu_i \in k$ ein weiteres Element in $k(\alpha)$, so gilt

$$\begin{aligned}\delta(xy) &= \delta\left(\sum_{i,j=0}^{p-1} \lambda_i \mu_j \alpha^{i+j}\right) = \sum_{i,j=0}^{p-1} (i+j)\lambda_i \mu_j \alpha^{i+j-1} \\ &= \sum_{i,j=0}^{p-1} j\lambda_i \mu_j \alpha^{i+j-1} + \sum_{i,j=0}^{p-1} i\lambda_i \mu_j \alpha^{i+j-1} = x\delta(y) + \delta(x)y. \qquad \square\end{aligned}$$

Aufgabe. Wir betrachten nun den F-Vektorraum $B = F \oplus F$. Zeigen Sie, dass B durch die Linksmultiplikation $f \cdot (x, y) = (fx, fy)$ und die Rechtsmultiplikation $(x, y) \cdot f = (xf + y\delta(f), yf)$ für alle $x, y, f \in F$ zu einem F-Bimodul wird. Zeigen Sie ferner, dass die kurze exakte Sequenz $0 \to F \to B \to B/F \to 0$ von F-Bimoduln nicht zerfällt. Somit ist R nicht isomorph zu einer Tensoralgebra.

Lösung. Die Linksmultiplikation definiert offensichtlich eine Linksmodulstruktur. Die folgenden Rechnungen zeigen, dass die Rechtsmultiplikation eine Rechtsmodulstruktur definiert. Für alle $x, y, f, g \in F$ gilt einerseits:

$$\begin{aligned} \delta(f+g) &= \delta(f) + \delta(g) \\ \Rightarrow (x(f+g) + y\delta(f+g), y(f+g)) &= (xf + y\delta(f), yf) + (xg + y\delta(g), yg) \\ \Rightarrow (x,y)\cdot(f+g) &= (x,y)\cdot f + (x,y)\cdot g. \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \delta(fg) &= f\delta(g) + \delta(f) \\ \Rightarrow (xfg + y\delta(fg), yfg) &= (xfg + y\delta(f)g + yf\delta(g), yfg) \\ \Rightarrow (x,y)\cdot(fg) &= (xf + y\delta(f), yf)\cdot g \\ \Rightarrow (x,y)\cdot(fg) &= ((x,y)\cdot f)\cdot g. \end{aligned}$$

Beide Aussagen sind für alle $x, y, f, g \in F$ wahr, da δ eine Derivation ist. Somit ist B ein F-Bimodul. Wie man leicht nachrechnet, ist die Inklusion $\iota\colon F \to F \oplus 0 \subseteq B$ ein F-Bimodulhomomorphismus.

Angenommen, die Sequenz aus der Aufgabenstellung zerfällt. Dann gibt es einen F-Bimodulhomomorphismus $\pi\colon B \to F$ mit $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_F$. Da π F-linear ist, gibt es Skalare

$a, b \in F$ mit $\pi(x, y) = ax + by$ für alle $(x, y) \in B$. Auf der anderen Seite ist π ein F-Rechtsmodulhomomorphismus, d.h. für alle $x, y, f \in F$ gilt

$$axf + byf = \pi(x, y) \cdot f = \pi((x, y) \cdot f) = \pi(xf + y\delta(f), yf) = axf + ay\delta(f) + byf.$$

Es folgt $\delta = 0$, was ein Widerspruch zu $\delta(\alpha) = 1$ ist. $\square$

Aufgabe. Zeigen Sie, dass die Algebra R aus Aufgabe 1 erblich ist. (Somit gilt der Satz von Wedderburn nicht über beliebigen Körpern.)

Lösung. Es gilt $R_R = (F00)_R \oplus (FF0)_R \oplus (BFF)_R$. Die Moduln $P_1 = (F00)_R$, $P_2 = (FF0)_R$ und $P_3 = (BFF)_R$ sind somit projektiv. Man sieht leicht ein, dass P_1, P_2, P_3 unzerlegbar sind. Da $\operatorname{mod} R$ als Kategorie aller endlich erzeugten Modul über einer endlich dimensionalen Algebra eine Krull-Schmidt-Kategorie ist, gilt $\operatorname{proj} R = \operatorname{add}(P_1 \oplus P_2 \oplus P_3)$.

Der R-Modul P_1 ist einfach. Der einzige nicht triviale R-Untermodul von P_2 ist der projektive Modul P_1. Die einzigen nicht trivialen R-Untermoduln von P_3 sind die projektiven Moduln $(BF0)_R \cong P_1 \oplus P_2$, $(FF0)_R = P_2$, $(B00)_R \cong P_1 \oplus P_1$ und $(F00)_R = P_1$. Nach der Proposition von Auslander ist R erblich. $\square$