LINEARE ALGEBRA I
8. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE, PHILIPP LAMPE

Aufgabe 1. Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der Restklassenkörper mit drei Elementen. Wir betrachten die zwei Unterräume $U = \mathcal{L}((\overline{1},\overline{1},\overline{1}),(\overline{2},\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\overline{2},\overline{1}))$ und $V = \mathcal{L}((\overline{2},\overline{0},\overline{1}),(\overline{0},\overline{0},\overline{1}))$ von K^3. Finden Sie Basen von U, V, $U+V$ und $U \cap V$ und ermitteln Sie die Dimensionen der vier Vektorräume.

Aufgabe 2. Sei $V \subseteq C(\mathbb{R})$ die Menge der Polynomfunktionen P mit reellen Koeffizienten, die zusätzlich die Bedingungen $P(0) = P(1) = 0$ und $\deg(P) \leq 4$ erfüllen. Hierbei bezeichnet $\deg(P)$ den Grad des Polynoms P. Beweisen Sie, dass V ein Unterraum ist. Finden Sie eine Basis des Unterraums und berechnen Sie seine Dimension.

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Ferner seien U_1, U_2, U_3 Unterrräume von V.

(a) Wir betrachten die Unterräume $W_1 = (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$ und $W_2 = (U_1 + U_2) \cap U_3$. Zeigen Sie, dass stets $W_1 \subseteq W_2$ gilt. Finden Sie ein Beispiel mit $W_1 \neq W_2$.
(b) Wir betrachten die Unterräume $W_3 = (U_1 \cap U_2) + U_3$ und $W_4 = (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3)$. Zeigen Sie, dass stets $W_3 \subseteq W_4$ gilt. Finden Sie ein Beispiel mit $W_3 \neq W_4$.
(c) Zeigen Sie, dass $\dim_K(W_1) + \dim_K(W_4) = \dim_K(W_2) + \dim_K(W_3)$ gilt.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Ferner seien $u = (u_1, u_2)$ und $v = (v_1, v_2)$ Vektoren in K^2. Zeigen Sie, dass u und v genau dann linear unabhängig sind, wenn $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$ gilt.

Abgabe am Freitag, 16. Dezember 2016, von 11:00 bis 12:00 Uhr in Raum V4-200.