

LINEARE ALGEBRA I

7. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Wiederholen Sie das Unterraumkriterium.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Teilmenge von \mathbb{Q}^3 kein Unterraum ist

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 2x + 4y - 1 = 0\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Teilmenge von \mathbb{Q}^3 ein Unterraum ist

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 2x + 4y - z = 0\}.$$

Aufgabe 2. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Seien v_1, \dots, v_n Vektoren aus V . Wir sagen v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig, wenn für alle $\lambda_i \in K$, $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

Untersuchen Sie, ob die folgenden Folgen von Vektoren im \mathbb{R}^3 linear unabhängig oder linear abhängig sind:

- (1) $v_1 = (0, 0, 0), v_2 = (1, 2, 3)$
- (2) $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 1)$
- (3) $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 2, 1)$
- (4) $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (0, 2, 3), v_3 = (1, 0, -3)$
- (5) $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (4, 5, 6), v_3 = (7, 8, 9)$

Aufgabe 3. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Es sei U ein Unterraum von V . Ein Unterraum $U' \subseteq V$ heißt Komplement zu U , falls

$$U \cap U' = \{0\} \quad \text{und} \quad U + U' = V$$

gilt.

- (a) Finden Sie drei Unterräume U_1, U_2, U_3 von \mathbb{R}^2 mit: Für alle $i \neq j$ gilt, dass U_i ein Komplement zu U_j ist.
- (b) Finden Sie für die folgenden Unterräume U von V ein Komplement:
 - (1) $V = \mathbb{R}^3, U = V$
 - (2) $V = \mathbb{R}^3, U$ die lineare Hülle von $(0, 1, 0)$ und $(1, 2, 1)$
 - (3) $V = \mathbb{R}^3, U$ die lineare Hülle von $(1, 1, 1)$
 - (4) $V = \mathbb{C}$ als Vektorraum über \mathbb{R}, U die lineare Hülle von $1 + 2i$

Aufgabe 4. Es sei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Es ist bekannt, dass \mathbb{F}_2 ein Körper mit zwei Elementen ist. Wir betrachten \mathbb{F}_2^2 als Vektorraum über \mathbb{F}_2 . Schreiben Sie für jeden Faktorraum von \mathbb{F}_2^2 alle Elemente auf.