E. Lau

Lineare Algebra 1, Übungsblatt 3

Abgabe Freitag 2.11.2018 bis 12 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Es sei immer K ein Körper.

Aufgabe 1. Es seien V ein K-Vektorraum und U, W zwei K-Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

1. Die Summe $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ ist ein K-Untervektorraum von V.

2. Die Vereinigung $U \cup W$ ist nur dann ein K-Untervektorraum von V, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ in K^2 sind genau dann linear unabhängig, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

Aufgabe 3. Es seien V ein K-Vektorraum und U, W zwei K-Untervektorräume von V mit $U \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie: Wenn $u_1, \ldots u_n \in U$ und $w_1, \ldots, w_m \in W$ linear unabhängige Systeme sind, dann ist das System $u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m$ in V linear unabhängig.

Aufgabe 4. Es sei X eine Menge und $P(X)$ die Menge der Teilmengen von X. Für $A, B \in P(X)$ definieren wir

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zeigen Sie, dass die Menge $P(X)$ mit der Verknüpfung $+$ eine abelsche Gruppe ist. Zeigen Sie außerdem, dass die abelsche Gruppe $P(X)$ auf genau eine Weise zu einem Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ gemacht werden kann.