E. Lau

Lineare Algebra 1, Übungsblatt 5

Abgabe Donnerstag 15.11.2018 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich. K ist ein Körper.

Aufgabe 1. Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, $w = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, und $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$w - e_1, w - e_2, \ldots, w - e_n$$

eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden.

Aufgabe 2. Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3. Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n < \infty$. Eine Hyperebene von V ist ein Untervektorraum der Dimension $n - 1$. Zeigen Sie:

1. Für eine Hyperebene $H \subseteq V$ und einen Untervektorraum $W \subseteq V$ mit der Eigenschaft $W \nsubseteq H$ gilt $\dim(W \cap H) = \dim(W) - 1$.
2. Für Hyperebenen $H_1, \ldots, H_r$ von V gilt $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_r) \geq n - r$
3. Für einen Unterraum $W \subseteq V$ der Dimension $n - d$ gibt es Hyperebenen $H_1, \ldots, H_d$ von V mit $W = H_1 \cap \ldots \cap H_d$.

Aufgabe 4. Es seien V und W zwei K-Vektorräume, $\dim(V) < \infty$. Zeigen Sie:

1. Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ gilt.
2. Für eine lineare Abbildung $f : V \to V$ sind folgende Bedingungen äquivalent:
   (a) f ist injektiv
   (b) f ist ein Isomorphismus
   (c) f ist surjektiv