E. Lau

Lineare Algebra 1, Übungsblatt 6

Abgabe Donnerstag 22.11.2018 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich. K ist ein Körper.

Aufgabe 1. Gibt es lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bzw. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 2, \quad f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 3, \quad f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 5,$$

$$g(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 7, \quad g(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = 11, \quad g(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 13, \quad g(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 17 \quad ?$$

Berechnen Sie gegebenenfalls $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ bzw. $g(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Aufgabe 2.

1. Es sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung so dass $f \circ f = f$. Zeigen Sie, dass $V = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ gilt.
2. Geben Sie ein Beispiel einer linearen Abbildung $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ mit $f \circ f = f$ und $f \neq 0$, $f \neq \mathrm{id}$.

Aufgabe 3. Es seien $f : V \to W$ und $g : W \to U$ lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Zeigen Sie:

1. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(f)$,
2. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(g)$,
3. $\operatorname{rg}(g \circ f) \geq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(W)$.

Hinweis zu 3.: Betrachten Sie die von g definierte Abbildung $\operatorname{Im}(f) \to U$.

Aufgabe 4. Für eine Abbildung von Mengen $f : A \to B$ ist der Graph $\Gamma_f \subseteq A \times B$ folgendermaßen definiert:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen K-Vektorräumen genau dann K-linear ist, wenn der Graph Γ_f ein Untervektorraum von $V \times W$ ist.

Hier wird die Menge $V \times W$ ein K-Vektorraum durch $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$ und $a(v, w) = (av, aw)$ für $v, v' \in V$ und $w, w' \in W$ und $a \in K$.