E. Lau

Lineare Algebra 1, Übungsblatt 7

Abgabe Donnerstag 29.11.2018 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich. K ist ein Körper.

Aufgabe 1. Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ und $x = ad - bc$. Zeigen Sie:

1. A ist genau dann invertierbar, wenn $x \neq 0$.
2. In dem Fall gilt $A^{-1} = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

als Matrix über dem Körper $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie eine K-Basis von $\operatorname{Ker}(A)$ in diesen beiden Fällen.

Aufgabe 3. Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Zeigen Sie:

1. Für einen Untervektorraum $U \subseteq V$ mit $U \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ hat die lineare Abbildung $\bar{f} : V/U \to W$, die durch $\bar{f}(v + U) = f(v)$ für $v \in V$ definiert ist, das gleiche Bild wie f und den Kern $\operatorname{Ker}(f)/U$.
2. Es gibt einen Isomorphismus $g : V/\operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}(f)$, $v + \operatorname{Ker}(f) \mapsto f(v)$.

Aufgabe 4. Eine quadratische Matrix $A \in M_n(K)$ heißt nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl r gibt mit $A^r = 0$.

1. Finden Sie für $n = 2$ eine nilpotente Matrix $A \neq 0$.
2. Zeigen Sie: Wenn A nilpotent ist, dann ist $E_n - A$ invertierbar.

Hinweis: Betrachten Sie $E_n + A + A^2 + \dots$.