E. Lau

Lineare Algebra 1, Übungsblatt 8

Abgabe Donnerstag 6.12.2018 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich. K ist ein Körper.

Aufgabe 1. Es sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ als Basis von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Basen $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $\mathcal{D} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ von $\mathbb{R}^4$ mit den Basiswechselmatrizen

$$T_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T_{\mathcal{B},\mathcal{D}}.$$

Aufgabe 2. Es sei V ein zweidimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass genau dann eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, für die die Matrix $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ die Gestalt $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ hat, wenn es einen eindimensionalen Unterraum $L \subseteq V$ mit $f(L) \subseteq L$ gibt.

Aufgabe 3. Die Spur einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ ist die als Summe der Diagonaleinträge definiert, $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Zeigen Sie:

1. Es gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für rechteckige Matrizen A, B solcher Größe, dass AB und BA definiert sind.
2. Es gilt $\mathrm{Spur}(BAB^{-1}) = \mathrm{Spur}(A)$ für quadratische Matrizen A, B gleicher Größe, wobei B invertierbar ist.
3. Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V ist das Element $\mathrm{Spur}(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f))$ von K unabhängig von der Basis $\mathcal{B}$ von V. Man definiert $\mathrm{Spur}(f) = \mathrm{Spur}(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f))$.
4. Für zwei Homomorphismen $f : V \to W$ und $g : W \to V$ zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen gilt $\mathrm{Spur}(f \circ g) = \mathrm{Spur}(g \circ f)$.

Aufgabe 4. Es seien V ein K-Vektorraum und U, W zwei Untervektorräume von V. Wir betrachten die Abbildung $f : U \to V/W$ mit $f(u) = u + W$ für $u \in U$. Zeigen Sie:

1. f ist genau dann injektiv, wenn $U \cap W = \{0\}$.
2. f ist genau dann surjektiv, wenn $V = U + W$.
3. f ist genau dann bijektiv, wenn $V = U \oplus W$.