E. Lau

Lineare Algebra 1, Übungsblatt 9

Abgabe Donnerstag 13.12.2018 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich. K ist ein Körper.

Aufgabe 1. Stellen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizen als Produkt von Elementarmatrizen dar.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. (Permutationen)

1. Schreiben Sie die folgenden Permutationen als Produkt von Transpositionen und bestimmen Sie ihr Signum.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ sei $\tau_{i,j} \in S_n$ die Transposition, die i und j vertauscht. Zeigen Sie, dass jedes Element der symmetrischen Gruppe S_n sich als Produkt von Transpositionen der Form $\tau_{i,i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$ darstellen lässt.

Aufgabe 3. Es sei $A \in M_{n \times m}(K)$. Eine Untermatrix von A ist eine Matrix, die aus A durch das Weglassen einer beliebigen Menge von Zeilen und Spalten entsteht. Es sei r die größte Zahl, so dass A eine invertierbare Untermatrix der Größe $r \times r$ hat. Zeigen Sie, dass $r = \mathrm{rg}(A)$ gilt.

Hinweis: Zeilenrang und Spaltenrang.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

1. Jeder Untervektorraum $W \subseteq K^n$ ist der Kern einer surjektiven linearen Abbildung $K^n \to K^m$ für ein geeignetes m.

2. Jeder affine Unterraum von K^n ist die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

Hinweis: Beweisen Sie 2. mit Hilfe von 1. auch dann, wenn Ihnen der Beweis von 1. nicht klar ist.