E. Lau

Lineare Algebra 1, Übungsblatt 10

Abgabe Donnerstag 20.12.2018 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich. K ist ein Körper.

Aufgabe 1. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix invertierbar?

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Berechnung von Determinanten.

1. Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ sei die Matrix $P_\sigma = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q})$ folgendermaßen definiert: $b_{ij} = 1$ wenn $j = \sigma(i)$ und $b_{ij} = 0$ wenn $j \neq \sigma(i)$. Zeigen Sie, dass $\det(P_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

2. Für eine gerade Zahl $n \geq 2$ sei $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q})$ definiert durch $a_{ij} = 1$ wenn $i < j$, $a_{ij} = 0$ wenn $i = j$, $a_{ij} = -1$ wenn $i > j$. Berechnen Sie $\det(A)$.

   Beispiel: Für $n = 4$ geht es um die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Für $A \in M_n(K)$, $B \in M_{n\times m}(K)$ und $D \in M_m(K)$ bilden wir die Blockmatrix der Größe $(n+m) \times (n+m)$

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\det(E) = \det(A)\det(D)$.

Hinweis: Betrachten Sie erst den Fall, dass A und D obere Dreiecksmatrizen sind.

Aufgabe 4. Es seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit einer Determinantenfunktion $\Delta : V^n \to K$ und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum der Dimension $n-1$. Zeigen Sie:

1. Für jedes $x \in V$ ist die Abbildung $\Delta_x : W^{n-1} \to K$, $\Delta_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \Delta(v_1, \ldots, v_{n-1}, x)$ eine Determinantenfunktion.

2. Die Determinantenfunktion Δ_x ist genau dann nicht trivial (d.h. nicht konstant Null), wenn Δ nicht trivial ist und $x \notin W$ gilt.