E. Lau

Lineare Algebra 1, Übungsblatt 11

Abgabe Donnerstag 10.1.2018 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich. K ist ein Körper.

Aufgabe 1. Berechnen sie die Determinanten der folgenden Matrix in $M_n(\mathbb{Q})$; im leeren Bereich sollen die Einträge der Matrix Null sein.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis. Probieren Sie erst $n = 1, 2, 3$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die folgenden reellen Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie für jede dieser Matrizen alle Eigenwerte und entscheiden Sie, welche diagonalisierbar sind.
2. Bestimmen Sie für die diagonalisierbaren Matrizen A aus 1. jeweils eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3. Es sei f ein nilpotenter Endomorphismus eines K-Vektorraums V mit $V \neq \{0\}$, d.h. es gibt ein n so dass $f^{\circ n} = f \circ \ldots \circ f$ (n Faktoren) gleich Null ist. Zeigen Sie, dass 0 der einzige Eigenwert von f ist.

Aufgabe 4. Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ eine invertierbare Matrix, deren Einträge in $\mathbb{Z}$ liegen. Zeigen Sie, dass die Einträge der inversen Matrix genau dann ebenfalls in $\mathbb{Z}$ liegen, wenn $\det(A) \in \{1, -1\}$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall $n = 2$.