E. Lau

Lineare Algebra 1, Übungsblatt 12

Abgabe Donnerstag 17.1.2018 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich. K ist ein Körper.

Aufgabe 1. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^4$ die lineare Hülle der Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Orthonormalbasen von V und von $V^\perp$.

Aufgabe 2. Für zwei Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt $x \times y \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

1. Für $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle x \times y, z \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$
2. Es gilt $x \times y = 0$ genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.
3. $x \times y$ ist orthogonal zu x und zu y.

Aufgabe 3. Es sei V ein Euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für zwei Untervektorräume U und W von V gilt:

1. $U \subseteq W$ genau dann, wenn $W^\perp \subseteq U^\perp$;
2. $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$;
3. $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Hinweis: Zeigen Sie 2. direkt und folgern Sie daraus 3.

Aufgabe 4. Es sei $V = M_n(\mathbb{R})$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ die Abbildung $\beta(A, B) = \mathrm{Spur}(AB)$. Die Spur kam auf Blatt 8 vor. Zeigen Sie:

1. Die Abbildung β ist eine symmetrische Bilinearform.

2. Die Einschränkung von β auf den Raum der symmetrischen Matrizen ist positiv definit.

3. Die Einschränkung von $-\beta$ auf den Raum der antisymmetrischen Matrizen ist ebenfalls positiv definit.

Eine quadratische Matrix A heißt symmetrisch, wenn $A = A^t$, und antisymmetrisch, wenn $A = -A^t$.