E. Lau

Lineare Algebra 1, Übungsblatt 13

Abgabe Donnerstag 24.1.2018 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich. K ist ein Körper.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften:

1. $||f(e_1)|| = 1$
2. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: wenn $\langle x, y\rangle = 0$ dann $\langle f(x), f(y)\rangle = 0$.

Zeigen Sie, dass f orthogonal ist.

Aufgabe 3. Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Wir wählen ein $w \in V$ mit $w \neq 0$ und definieren eine Abbildung

$$s_w : V \to V, \qquad s_w(x) = x - 2\frac{\langle x, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w.$$

Ferner sei $H = \langle w\rangle^\perp$. Zeigen Sie:

1. s_w ist eine orthogonale Abbildung.
2. Es gilt $H = \{x \in V \mid s_w(x) = x\}$.
3. s_w ist die einzige orthogonale Abbildung mit der Eigenschaft 2.
4. Es gilt $s_w \circ s_w = \mathrm{id}_V$.

Aufgabe 4. Für Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem euklidischen Vektorraum V bilden wir die Determinante

$$G(v_1, \ldots, v_n) = \det\left(\langle v_i, v_j\rangle\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Zeigen Sie, dass $G(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ und $G(v_1, \ldots, v_n) = 0$ genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $V = \mathbb{R}^n$ und berechnen Sie für die Matrix A, deren Spalten $v_1, \ldots, v_n$ sind, das Produkt A^tA. Im Allgemeinen kann man V durch die lineare Hülle der v_i ersetzen.