E. Lau

Lineare Algebra 1, Präsenzübungsblatt 6

Aufgabe 1. Begründen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gibt so dass

$$f(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \quad f(\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $f(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right))$ und $f(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right))$ und finden Sie eine Matrix A, so dass $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Überprüfen Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2. Gibt es lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) = 5, \quad f(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)) = 4, \quad f(\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right)) = 3$$

bzw.

$$g(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) = 4, \quad g(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)) = 3, \quad g(\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right)) = 1 \quad ?$$

Aufgabe 3. Es sei V ein K-Vektorraum, $f : V \to K$ eine lineare Abbildung und $v \in V$ mit $f(v) \neq 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass $V = \operatorname{Ker}(f) \oplus \langle v \rangle$.