E. Lau

Lineare Algebra 1, Präsenzübungsblatt 8

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Äquivalenz von Matrizen auf der Menge $M_{n\times m}(K)$ und die Ähnlichkeit von Matrizen auf der Menge $M_n(K)$ Äquivalenzrelationen sind.

Aufgabe 2. Prüfen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 12 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Standardbasis $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ und die Basis $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_1$.

1. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$ und die Basiswechselmatrizen $T_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ sowie $T_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.
2. Verwenden Sie die Ergebnisse aus (1), um die darstellende Matrix $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ zu bestimmen. Überprüfen sie das Ergebnis, indem Sie Av_i berechnen.

Aufgabe 4. Es seien $V' \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\psi} W'$ lineare Abbildungen, wobei ϕ und ψ bijektiv sind, sowie $f' = \psi \circ f \circ \phi$. Zeigen Sie, dass es Isomorphismen

$$\mathrm{Ker}(f') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(f), \qquad \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f')$$

gibt.