E. Lau

Lineare Algebra 1, Präsenzübungsblatt 12

Aufgabe 1. Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^2$ die lineare Hülle des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Orthonormalbasen von W und von $W^\perp$.

Aufgabe 2. Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie für $x, y \in V$:

1. x und y sind genau dann orthogonal, wenn $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.
2. Es gilt $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ (Parallalogrammgleichung).

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen euklidischen Vektorräumen genau dann eine Isometrie ist, wenn sie die Norm erhält, d.h. wenn $||f(x)|| = ||x||$ für alle $x \in V$ gilt. Hinweis: Polarisierung

Aufgabe 4. Zur Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

1. Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $x_1, \ldots x_n$ stets gilt:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

   Hinweis: Skalarprodukt von $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $(1, \ldots, 1)$.

2. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx.$$