E. Lau

Lineare Algebra 1, Präsenzübungsblatt 13

Aufgabe 1. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Zeigen Sie: Für $x, y \in V$ gilt $||x|| = ||y||$ genau dann, wenn $x - y$ und $x + y$ orthogonal sind.

Aufgabe 2. Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Für eine Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$ so dass v_1 ein Vielfaches von $(1, 1, 1)$ ist, hat die darstellende Matrix von f bezüglich dieser Basis die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie α anschaulich und überprüfen Sie das Ergebnis rechnerisch.

Aufgabe 3.

1. Bestimmen Sie alle orthogonalen Matrizen $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ mit $a_{ij} \geq 0$ für alle i, j. (Es gibt genau zwei).
2. Bestimmen Sie die Anzahl der orthogonalen Matrizen $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $a_{ij} \geq 0$ für alle i, j.