E. Lau

Algebra 1, Übungsblatt 7

Abgabe Donnerstag 28.11.2019 bis 8:25 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome in den angegebenen Ringen irreduzibel sind.

1. $f = X^2Y + Y^2X - X - Y + 1$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$.
   Hinweis: Schreiben Sie f in $\mathbb{Q}[X][Y]$.
2. $g = X^2 + Y^2 + Z^2$ in $\mathbb{C}[X, Y, Z]$.
   Hinweis: Zerlegen Sie $X^2 + Y^2$ in Linearfaktoren.

Aufgabe 2. Es seien $x = \sqrt[3]{2}$ und $y = \sqrt[4]{3}$ in $\mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie die Körpergrade aller Erweiterungen im folgenden Diagramm.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \mathbb{Q}(x,y) \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
\mathbb{Q}(x) \arrow[dr] & & \mathbb{Q}(y) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

2. Es sei $\zeta = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$. Finden Sie einen Isomorphismus $\mathbb{Q}(x) \cong \mathbb{Q}(\zeta x)$.

Aufgabe 3. Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie:

1. Wenn $[L : K]$ eine Primzahl ist, dann ist $L = K[a] = K(a)$ für ein $a \in L$.
2. Es sei $[L : K]$ eine Potenz von 3 und $a \in L$ mit $a^2 \in K$. Dann ist $a \in K$.
   Hinweis: Was kann $[K(a) : K]$ sein?
3. Es sei $[L : K]$ eine Potenz von 2 und $f \in K[X]$ vom Grad 3 so dass f in L eine Nullstelle hat. Dann hat f in K eine Nullstelle.
   Hinweis: Betrachten Sie das Minimalpolynom einer Nullstelle von f.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Eine Körpererweiterung L/K ist genau dann algebraisch, wenn jeder Unterring $R \subseteq L$ mit $K \subseteq R$ ein Körper ist.