E. Lau

Algebra 1, Übungsblatt 8

Abgabe Donnerstag 5.12.2019 bis 8:25 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Es sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$.

1. Zeigen Sie, dass L ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 5$ über $\mathbb{Q}$ ist.
2. Bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$ dieser Erweiterung.
   Hinweis: Mit $M = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$ gilt $L = M(i)$.
3. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung des Polynoms $X^4 - 5$ über dem Körper $M = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$.

Aufgabe 2. Es sei L/K eine Körpererweiterung. Zeigen Sie:

1. Die Menge M aller K-algebraischen Elemente von L ist ein Körper.
2. Wenn L algebraisch abgeschlossen ist, dann ist M ein algebraischer Abschluss von K.
   Beispiel: Das ergibt einen algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3. Es sei L/K ein Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad $n > 0$. Zeigen Sie:

1. Es gilt $[L : K] \leq n!$.
2. Wenn $[L : K] = n!$, dann ist f irreduzibel.
3. Gilt auch die Umkehrung von 2.?

Aufgabe 4. Es sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und $\sigma : L \to L$ ein K-Homomorphismus. Zeigen Sie:

1. Wenn L/K endlich ist, dann ist σ bijektiv.
2. Für jedes Polynom $f \in K[X]$ sei $L_f \subseteq L$ der Teilkörper, der von den in L liegenden Nullstellen von f erzeugt ist. Dann gilt $\sigma(L_f) = L_f$.
3. Der Homomorphismus σ ist bijektiv.