E. Lau

# Lineare Algebra 2, Übungsblatt 5

Abgabe Donnerstag 9.5.2019 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Es seien $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum endlicher Dimension.

**Aufgabe 1.** Für welche natürlichen Zahlen $n$ trifft die folgende Aussage zu?

> Wenn zwei Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ das gleiche Minimalpolynom und das gleiche charakterstische Polynom haben und wenn für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die Matrizen $A - \lambda E_n$ und $B - \lambda E_n$ den gleichen Rang haben, dann sind $A$ und $B$ ähnlich.

**Aufgabe 2.** Es seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie:

1. Für jedes $\lambda \in K$ ist der Eigenraum $V_f(\lambda)$ stabil unter $g$, d.h. aus $x \in V_f(\lambda)$ folgt $g(x) \in V_f(\lambda)$.
2. Wenn $f$ und $g$ diagonalisierbar sind, dann sind sie simultan diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis von $V$, deren Elemente Eigenvektoren von $f$ und Eigenvektoren von $g$ sind.

**Aufgabe 3.** Der Jordanblock der Größe $n \times n$ zum Eigenwert $\lambda$ ist

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

1. Es sei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ eine obere Dreiecksmatrix mit $a_{ii} = \lambda$ für alle $i$. Zeigen Sie, dass $A$ genau dann zu $J(\lambda, n)$ ähnlich ist, wenn $a_{i,i+1} \neq 0$ für $1 \leq i < n$.
2. Nun sei $K = \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Für $\lambda \in K$ mit $\lambda \neq 0$ und für $r \geq 1$ ist die Potenz $J(\lambda, n)^r$ ähnlich zu $J(\lambda^r, n)$.
3. Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $r \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Jordansche Normalform der Potenz $A^r$ aus der Jordanschen Normalform von $A$ entsteht, indem man die Diagonaleinträge zur $r$-ten Potenz erhebt.

**Aufgabe 4.** Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt unipotent, wenn $f - \mathrm{id}_V$ nilpotent ist. Zeigen Sie:

1. Ein Endomorphismus $f$ von $V$ ist genau dann unipotent, wenn $\chi_f = (X-1)^n$ für $n = \dim(V)$. In dem Fall ist $f$ bijektiv.
2. Jeder bijektive trigonalisierbare Endomorphimsus $f$ von $V$ hat eine eindeutige Darstellung $f = U \circ D$ mit unipotentem $U \in \mathrm{End}(V)$, diagonalisierbarem $D \in \mathrm{End}(V)$ so dass $U \circ D = D \circ U$.