E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 6

Abgabe Donnerstag 16.5.2019 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis für $V = \mathbb{R}^n$ bezüglich der symmetrischen Bilinearform $\beta(x, y) = x^t Ay$ in den folgenden Fällen:

1. $n = 2, \ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
2. $n = 3, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
3. $n = 4, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. Wie in Aufgabe 3 von Präsenzblatt 5 sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens n mit reellen Koeffizienten und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ die Bilinearform $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Zeigen Sie:

1. Die Bilinearform β ist symmetrisch und positiv definit.
2. Die Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ mit $a_{ij} = 1/(i + j - 1)$ ist invertierbar.

Hinweis: Dies ist die Matrix, die in der genannten Aufgabe entsteht.
Zusatzaufgabe: Versuchen Sie, den zweiten Punkt rein algebraisch zu zeigen.

Aufgabe 3. Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller beschränkten reellen Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}$, $((a_n), (b_n)) \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{a_n b_n}{n^2}$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform ist.
2. Finden Sie einen Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $W \neq V$ aber $W^\perp = \{0\}$.

Aufgabe 4. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K der Charakterstik ungleich zwei. Zeigen Sie, dass jede Bilinearform $\beta : V \times V \to K$ auf eindeutige Weise als Summer einer symmetrischen und einer alternierenden Bilinearform dargestellt werden kann.

Erinnerung: β ist alternierend, wenn $\beta(x, x) = 0$ für alle $x \in V$.