E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 9

Abgabe Donnerstag 6.6.2019 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass

$$SU(2) = \{\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und bestimmen Sie ihre Iwasawa-Zerlegung $A = QDU$, d.h. Q ist orthogonal, D ist diagonal mit positiven Diagonaleinträgen, und U ist eine unipotente obere Dreiecksmatrix.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist und berechnen Sie die Choleski-Zerlegung $A = S^*S$, d.h. S ist eine komplexe obere Dreiecksmatrix mit reellen positiven Diagonaleinträgen.

Aufgabe 4. Es seien V ein Euklidischer Vektorraum der Dimension n und $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $v_i \neq 0$, sowie $s_i : V \to V$ die Spiegelung an der Hyperebene $H_i = \langle v_i \rangle^\perp$. Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_n$ genau dann eine Orthogonalbasis von V bilden, wenn $s_1 \circ \ldots \circ s_n = -\operatorname{id}_V$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie $(s_1 \circ \ldots \circ s_n)(w)$ für $w \in \langle v_2, \ldots, v_n \rangle^\perp$.